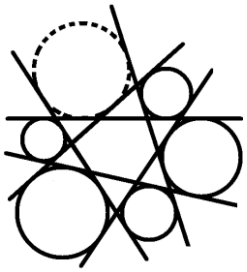
17/2/2014 **מחנה פברואר** י"ז באדר א' תשע"ד

קבוצת ירדן

1. מצאו שני מספרים חמש-ספרתיים A, B המורכבים מהספרות 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , כך שכל ספרה תופיע פעם אחד בדיוק, והמכפלה של שני המספרים תהיה גדולה ככל האפשר.

2. הוכיחו כי לכל m,n שלמים חיוביים מתקיים אי-השוויון: $\left|\frac{m}{n}-\sqrt{3}\right| \geq \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)n^2}$.

3. לפנינו n אבנים בגדלים שונים שעומדות בשורה. אנחנו מעוניינים לסדר אותן בסדר עולה, כך שככל שאבן ימנית יותר, ככה היא תהיה גדולה יותר. באפשרותנו לבצע פעולות של החלפת המיקום של שתי אבנים במקומות i, j אך זה יעלה לנו $|i-j|$ שקלים. (האבן השמאלית ביותר היא במיקום 1, האבן שאחריה היא במיקום 2, וכן הלאה). כמה שקלים נצטרך, לכל הפחות, בשביל שנוכל בהכרח לסדר את האבנים בסדר עולה ללא תלות בסדרן ההתחלתי?



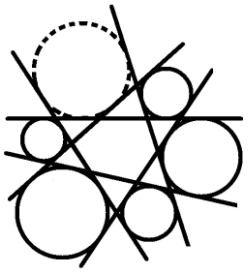
4. הישרים שבציור משיקים ל-5 מעגלים ברביעיות. הוכיחו שיש מעגל שישי שמשיק ל-4 ישרים, כאשר המצב היחסי של הישרים והמעגלים הוא כמו בציור.

בהצלחה!

17/2/2014 **מחנה פברואר** י"ז באדר א' תשע"ד

קבוצת רותם

1. לפנינו n אבנים בגדלים שונים שעומדות בשורה. אנחנו מעוניינים לסדר אותן בסדר עולה, כך שכל שאבן ימנית יותר, ככה היא תהיה גדולה יותר. באפשרותנו לבצע פעולות של החלפת המיקום של שתי אבנים במקומות i, j אך זה יעלה לנו $|i-j|$ שקלים. (האבן השמאלית ביותר היא במיקום 1, האבן שאחריה היא במיקום 2, וכן הלאה). כמה שקלים נצטרך, לכל הפחות, בשביל שנוכל בהכרח לסדר את האבנים בסדר עולה ללא תלות בסדרן ההתחלתי?



2. הישרים שבציור משיקים ל-5 מעגלים ברביעיות. הוכיחו שיש מעגל שישי שמשיק ל-4 ישרים, כאשר המצב היחסי של הישרים והמעגלים הוא כמו בציור.

3. יהי $p=3k+1$ ראשוני, a שלם. נתון כי כמות הפתרונות של המשוואה $x^3 = y^2 + a \pmod p$ מתחלקת ב- p. הוכיחו כי a מתחלק ב- p.

4. הוכיחו כי לכל a,b,c,d ממשיים המקיימים $a+b+c+d=0$, מתקיים

$$\frac{1-a}{3+a^2}+\frac{1-b}{3+b^2}+\frac{1-c}{3+c^2}+\frac{1-d}{3+d^2}\le\frac{4}{3}.$$

בהצלחה!

18/2/2014 **מחנה פברואר** י"ח באדר א' תשע"ד

תחרות קבוצתית

1. קנטאור הוא כלי שבכל תור זוגי הולך כמו פרש, ובכל תור אי-זוגי זז משבצת אחת באלכסון. האם ניתן באמצעות קנטאור לעבור על כל משבצת פעם אחת בדיוק ולחזור למשבצת המקורית, בלוח משבצות בגודל:

א. 6×6 ?

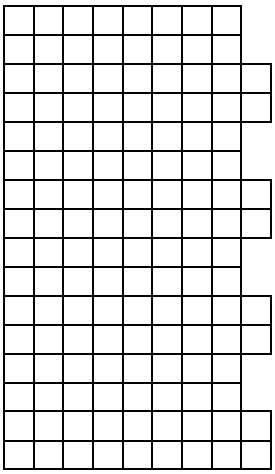
ב. 6×7 ?

ג. 6×1864 ?

2. מצאו את d הטבעי הגדול ביותר שעבורו $k^{60}-k^4$ מתחלק ב-d לכל k.

3. יהי ABC משולש. יהיו A_1, B_1, C_1 אמצעי הצלעות BC, CA, AB בהתאמה ויהיו A_2, B_2, C_2 אמצעי הקווים השבורים BAC, CBA, ACB בהתאמה. הוכיחו כי הקטעים A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 נחתכים בנקודה אחת.

4. נתון פאון משוכלל (ארבעון, קוביה, תמניון, תריסרון או עשרימון). נסמן ב-N את כמות הקודקודים של הפאון, וב-K את מספר הפאות שנפגשות בכל קודקוד. מישור יקרא מישור סימטריה של הפאון אם שיקוף של המרחב ביחס למישור זה מעביר את הפאון לעצמו. לכל מישור סימטריה נספור, בכמה קודקודים הוא עובר. הוכיחו כי סכום המספרים האלה הוא NK.



5. כמה מלבנים שכל אחד מהם מורכב מ-4 משבצות אפשר לחתוך מהצורה שבציור? (מלבן יכול להיות גם ריבוע.)

6. קו שבור $A_0A_1A_2...A_n$ נקרא עקבי, אם קיים ווקטור v עבורו לכל $i<n$ הזוויות בין ווקטור v לווקטור A_iA_{i+1} קטנה ממש מ-45°. במישור נבחרו 5777 נקודות שונות. מצאו את המספר n הגדול ביותר של נקודות שתמיד ניתן לבחור מביניהן, כך שיווצר קו שבור עקבי.

7. מצאו את כל המספרים הראשוניים מהצורה $p=3x^3+13x^2y+18xy^2+8y^3$ כאשר x,y שלמים.

8. נתונות שתי קליפות כדוריות שמרכזיהן P, Q. ישר אחד משיק לשתי הקליפות בנקודות A ו-B, וישר אחר משיק לשתי הקליפות בנקודות C ו-D. הוכיחו כי ההיטלים של הקטעים AC ו-BD על הישר PQ שווים באורכם.

9. נתון פולינום $p(x)$ בעל מקדמים ממשיים עבורו לכל n שלם $p^2(n)$ שלם. האם בהכרח $p(n)\cdot p(n+1)$ שלם לכל n שלם?

10. במשולש אורך הרדיוס של המעגל החוסם R, של המעגל החסום r, ושל התיכונים m_a, m_b, m_c. הוכיחו כי $m_a + m_b + m_c \le 4R + r$.

11. נתון משולש ABC עם שטח 1, ומשולש DEF שהתקבל ממנו ע"י סיבוב ב-180 מעלות ביחס לנקודה כלשהי. מהו השטח המקסימלי האפשרי של החיתוך שלהם?

12. נתונה טבלת שוקולד מלבנית עם צלעות שלמות. דרך אחת לחלק אותה לריבועים היא לחתוך בכל צעד מאחד הקצוות את הריבוע הגדול ביותר האפשרי. בטבלה שנותרה, ממשיכים באותה צורה. ניתן, כמובן, לחלק אותה לריבועים גם בדרכים אחרות. האם השיטה שתוארה תיתן בהכרח את הערך הקטן ביותר של:
א) מספר הריבועים המתקבלים?
ב) סכום היקפי הריבועים המתקבלים?

בהצלחה!

19/2/2014 **מחנה פברואר** י"ט באדר א' תשע"ד

קבוצת ירדן

1. הוכיחו כי אם $p=4k+1$ הוא מספר ראשוני, אז $(2k)!^2+1$ מתחלק ב- p.

2. נתון מחומש קמור ABCDE. נניח כי $AB=CD$, $AC=BD$, $\sphericalangle AEB=\sphericalangle CED$, $AE\neq DE$. הוכיחו שהמחומש חסום במעגל.

3. נתונים מספרים ממשיים a,b,c,d. נגדיר $g=a+c$, $r=b+d$. הוכיחו כי
$$a^2+b^2+c^2+d^2+\tfrac{1}{2}\geq g+r-gr.$$

4. נתונה טבלה $n\times n$ שבכל משבצת שלה רשום מספר. ניתן "לסובב" כל שורה: להעביר את כל המספרים משבצת אחת ימינה, ואת המספר בקצה הימני להעביר לקצה השמאלי. באופן דומה ניתן "לסובב" כל עמודה. תחת אילו תנאים (על n ועל המספרים בטבלה) ניתן באמצעות סדרת מהלכים להגיע למצב בו הטבלה החדשה תהיה סימטרית לטבלה המקורית ביחס לאלכסון?

בהצלחה!

19/2/2014 **מחנה פברואר** י"ט באדר א' תשע"ד

קבוצת רותם

1. יהא n מספר טבעי. מצא/י את הטבעי הקטן ביותר k בעל התכונה הבאה: לכל d טבעי ולכל סדרת מספרים ממשיים $a_1,a_2,...,a_d$ שמקיימים $0 \le a_i \le 1$ לכל $i=1,2,...,d$ וגם $a_1+a_2+...+a_d=n$, ניתן לחלק את המספרים הללו ל-k קבוצות (חלקן אולי ריקות) כך שסכום האיברים בכל קבוצה הינו לכל היותר 1.

2. יהא n טבעי, ותהא $a_1,...,a_n$ סדרה של טבעיים. נמשיך את הסדרה באופן מחזורי לסדרה אינסופית לפי הכלל $a_{n+i}=a_i$ לכל $i \ge 1$. נתון כי $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le a_1+n$ וכן $a_{a_i} \le n+i-1$ לכל $i=1,2,...,n$.
הוכח/י כי $a_1+a_2+...+a_n \le n^2$.

3. יהא ABCDEF משושה קמור. נתון כי $AB=DE$, $BC=EF$, $CD=FA$, וכן $\sphericalangle A-\sphericalangle D=\sphericalangle C-\sphericalangle F=\sphericalangle E-\sphericalangle B$. הוכח/י כי האלכסונים AD, BE ו-CF נחתכים בנקודה אחת.

בהצלחה!

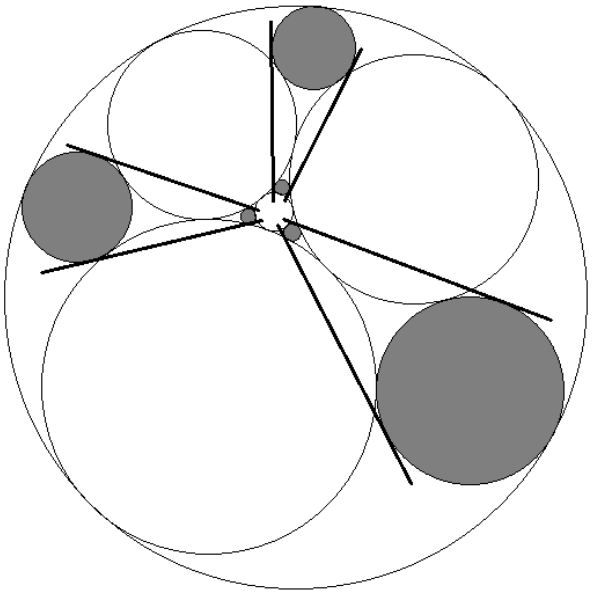
20/2/2014 **מחנה פברואר** כ' באדר א' תשע"ד

קבוצת ירדן

1. עבור אילו n טבעיים קיימת טבלה של מספרים טבעיים, של n עמודות ושלוש שורות, כך שסכום המספרים בכל עמודה מתחלק ב-n, ובכל שורה ההפרש בין כל שני מספרים לא מתחלק ב-n?

2. בגלקסיה זרה 15 תחנות חלל, שמחוברות ב-50 קווי טלפורט (כל קו טלפורט מחבר שתי תחנות שונות; לכל זוג תחנות יכול להיות קו אחד לכל היותר שמחבר אותן). הוכיחו, כי אם ניתן להגיע מתחנה אחת לאחרת באמצעות מספר טלפורטציות, אז אפשר לעשות זאת בפחות מ-7 מעברים.

3. תהיה $\mathbb{G}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>1\}$. מצאו את כל הפונקציות החד-חד-ערכיות $g:\mathbb{G}\to\mathbb{G}$ המקיימות $\left(g\left(g\left(x\right)\right)-1\right)\cdot\left(g\left(x\right)+1\right)=2g\left(g\left(x\right)\right)$ לכל $x\in\mathbb{G}$.



4. בציור מופיעים שני מעגלים אחד בתוך השני, ושלושה מעגלים נוספים שמשיקים זה לזה ולשני המעגלים הראשונים. בנוסף צוירו שישה עיגולים אפורים שכל אחד מהם משיק לשלושה מבין המעגלים הראשונים.
לאחר מכן הועברו 6 משיקים משותפים חיצוניים לעיגולים האפורים כמו בציור. הוכיחו כי כל ששת המשיקים האלה נפגשים בנקודה אחת.

בהצלחה!

17/2/2014 **מחנה פברואר** י"ז באדר א' תשע"ד

קבוצת רותם

1. יהא ω המעגל החוסם של משולש ABC. נסמן ב-M ו-N את אמצעי הצלעות AB ו-AC בהתאמה, ונסמן ב-T את אמצע הקשת BC של ω שלא מכילה את A. המעגלים החוסמים של המשולשים AMT, ANT חותכים את האנכים האמצעיים של AC ושל AB בנקודות X, Y בהתאמה; נניח כי X ו-Y נמצאים בתוך המשולש ABC. הישרים MN ו-XY נפגשים בנקודה K. הוכיחו כי KT = KA.

2. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים שלמים חיוביים n כך שהמחלק הראשוני הגדול ביותר של n^4+n^2+1 שווה למחלק הראשוני הגדול ביותר של $(n+1)^4+(n+1)^2+1$.

3. במדינה מסוימת חלק מזוגות הערים מחוברים בטיסות ישירות בשני הכיוונים. אפשר להגיע מכל עיר לכל עיר במספר טיסות. המרחק בין שתי ערים מוגדר להיות הכמות המינימלית של טיסות שצריך בשביל לעבור מעיר אחת לשניה. נתון, שלכל עיר יש לכל היותר 100 ערים שמרחקן ממנה הוא בדיוק 3. הוכיחו כי לא קיימת עיר עבורה יש מעל 2550 ערים שמרחקן ממנה הוא בדיוק 4.

בהצלחה!