פולינומים מתחלפים

הגדרה. פולינומים P,Q נקראים מתחלפים אם $P\circ Q=Q\circ P$.

סוגיה א

1. הוכח כי לכל $P\in\mathbb{C}[x]$ הפולינום $P\circ P\circ P\circ\ldots\circ P$ מתחלף אם פולינום P.

2. הוכח כי שתי המשפחות הבאות הן משפחות של פולינומים מתחלפים:

א. $P_n(x)=x^n$

ב. פולינומי צ'בישוב: $\cos nx=P_n(\cos x)$.

3. נניח כי $P\circ Q=Q\circ P$, ובנוסף $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ הוא $T(x)=ax+b$.

נגדיר $Q_1=T^{-1}\circ Q\circ T$, $P_1=T^{-1}\circ P\circ T$. אז גם P_1 , Q_1 מתחלפים.

4. מצאו את כל הפולינומים שמתחלפים

א. עם $Q(x)=x+b$, כאשר $b\neq 0$.

ב. עם $Q(x)=ax+b$, כאשר $a\neq 0$.

ג. עם $Q(x)=x^n$, כאשר n טבעי.

5. מצאו את כל $P,R\in\mathbb{C}[x]$, עבורם $P(x^n)=R(P(x))$ עבור n טבעי מסוים.

סוגיה ב

1. הוכח כי לכל $P\in\mathbb{C}[x]$ המקיים $\deg P>1$ קיים רק מספר סופי של $Q\in\mathbb{C}[x]$ מדרגה $\leq m$ שמתחלפים עם P. (עשו זאת בלי לבדוק מקדמים.)

2. לכל $m>1$ טבעי, קיים $P\in\mathbb{C}[x]$ מדרגה m, שלא מתחלף עם אף $Q(x)$ עבורו $1<\deg Q<m$.

סוגיה ג

מרגע זה הפולינומים שלנו יהיו מתוקנים (מקדם מוביל = 1).

1. הראו כי $P \sim Q \Leftrightarrow P \circ Q = Q \circ P$ זה יחס שקילות.

(למה זה לא מתקיים עבור פולינומים לא מתוקנים?)

2. הראו כי אם $P \sim Q$, וגם $\deg P = \deg Q > 1$ אזי $P = Q$.

הגדרה. יהיה P פולינום מתוקן. נקרא לקבוצה $\{\deg Q \mid P \sim Q\}$ הספקטרום של P.

ברור כי אם $\deg P = n$ אז $1, n, n^2, n^3, \ldots$ שייכים לספקטרום.

אם הספקטרום של P הוא $\mathbb{N}$, נגיד כי P פולינום מוצלח.

אם הספקטרום של P הוא $\{1, n, n^2, n^3, \ldots\}$, נגיד כי P מפוסטן לגמרי.

3. הראו כי $x^2, x^2 - 2$ הם פולינומים מוצלחים.

4. הראו כי אם $x^2 - a$ מוצלח, אז $a = 0, 2$.

5. מצאו את כל הפולינומים המוצלחים מדרגה 2: כלומר מסוג $x^2 + bx + c$ (לבדוק עבור $\deg Q = 3$).

6. מצאו את **<u>כל</u>** הפולינומים המוצלחים.

7. הוכיחו שהספקטרום של פולינום $P(x) = x^2 + 2$ מורכב ממספרים זוגיים (ו-1).

8. הראו כי הפולינום $p(x) = x^2 - a$ מפוסטן לגמרי במקרים הבאים

א. $a < 0$ ב. $a > 2$ ג. $0 < a < 1$

ד. $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ה. a טרנצנדנטי

9. הוכיחו כי לכל $d > 1$ קיים פולינום מפוסטן לגמרי מדרגה d.

סוגיה ד

1. הראו שאם פונקציה שלמה מתחלפת אם פולינום מדרגה גדולה מ-1, אז היא פולינום.

2. מצאו את כל הפונקציות $f \in Hol(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ שמתחלפות אם $p(x) = x^n$.