תרגיל קומבינאטורי

1. שבעה אנשים שיחקו טניס בטורניר, כל אחד שיחק פעם אחת נגד כל אחד אחר (בטניס אין תיקו). האם יתכן, שמבין כל ארבעה ניתן לבחור שלושה שאף אחד מהם לא ניצח את שני האחרים?

2. האם ניתן לצבוע מספרים טבעיים ב-2009 צבעים כך שכל צבע יופיע אינסוף פעמים, ולא יהיו אף שני מספרים טבעיים a,b עבורם $a,b,a\cdot b$ הם משלושה צבעים שונים?

3. נתונים 10 מספרים שונים בזוגות, שעבור כל שניים מהם או שסכומם רציונלי, או שמכפלתם רציונלית. הוכיחו כי הריבועים של המספרים רציונליים.

4. (IMO 92) נתונות 9 נקודות במרחב, אשר אף 4 מהן לא על מישור אחד, שמחוברות בקטעים. מתוך הקטעים, K צבועים באדום או בכחול, והקטעים האחרים אינם צבועים. עבור איזה K קטן ביותר קיים משולש, אשר שלושת הצלעות שלו צבועות באותו צבע?

5. (IMO 94) הראו שיש קבוצה A של מספרים טבעיים בעלת התכונה הבאה: לכל קבוצה אינסופית S של מספרים ראשוניים קיימים שני מספרים טבעיים, $m\in \mathrm{A}$, $n\notin \mathrm{A}$, ומספר טבעי $k\geq 2$ כך שגם m וגם n הם מכפלות של k איברי S.

6. א. הנמר והחמור משחקים על גרף מלא בעל 1864 קודקודים. החמור כותב על כל קשת ספרה מסוימת, לפי בחירתו. לאחר מכן, הנמר כותב על כל קודקוד ספרה מסוימת, לפי בחירתו. אם בסוף יש מקצוע, שעליו ועל שני קודקודיו יש אותו מספר, אז החמור מנצח. מי יכול לנצח: הנמר או החמור? (תזכורת: יש בסה"כ 10 ספרות.)
ב. אותה שאלה ל-149 קודקודים.

7. נתון גרף שמספר הצביעה שלו (לפי קודקודים) הוא 7. הוכיחו כי קיימים בו 7 מעגלים אי-זוגיים ללא קשתות משותפות.

8*. (Kirkman's schoolgirls problem) במהלך שבוע, כל יום מצעידים 15 אנשים בשלשות. האם יתכן שכל זוג אנשים יצעדו באותה השלשה לפחות פעם אחת?

בהצלחה!