תרגיל משפט השאריות הסיני

1. לקראת המסדר הסמל סידר את המחלקה בשלשות, אבל הייתה שלשה חסרה (חייל אחד שחסר). אחר כך הוא סידר את המחלקה ברביעיות, אבל הייתה רביעייה חסרה. אחר כך סידר את חיילים בחמישיות, ועדיין הייתה חמישייה חסרה. כמה חיילים יש במחלקה?

2. סמל במחלקה אחרת נתקל באותה בעיה כאשר ניסה לסדר חיילים בשלשות וברביעיות, אבל הצליח לסדר את החיילים בחמישיות. כמה חיילים יש במחלקה שלו?

3. הוכיחו כי $a^5 - a$ מתחלק ב-30, עבור כל a שלם.

4. האם קיים מספר טבעי N, עבורו $\frac{N}{2}$ הוא ריבוע שלם, $\frac{N}{3}$ הוא חזקה שלישית, ו-$\frac{N}{5}$ הוא חזקה חמישית?

5. הוכיחו כי אם $(m,n)=1$ אז $\varphi(mn)=\varphi(m)\cdot\varphi(n)$.

6. מצאו את כל המספרים הדו-ספרתיים N, כך שברישום העשרוני של N^2, המספר N מופיע בצד ימין.

7. א. מספר ראשוני נקרא מספר ראשוני של פרמה (Fermat) אם הוא מסוג 2^n+1. נגיד שבאמצעות מחשב חזק במיוחד מגלים מספר ראשוני של פרמה שעוד לא הכירו. מה תהיה הספרה האחרונה (הימנית) שלו?
ב. מספר ראשוני נקרא מספר ראשוני של מרסן (Mersenne) אם הוא מסוג 2^n-1. נגיד שבאמצעות מחשב חזק במיוחד מגלים מספר ראשוני של מרסן שעוד לא הכירו. מה תהיה הספרה האחרונה שלו?

8. נניח כי $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{23}=\frac{a}{23!}$. מצאו את השארית של a בחלוקה ב-1001.

9. א. בארץ רחוקה מאוד יש מטבעות שערכם 7 ומטבעות שערכם 13 (וזה הסוג היחיד של כסף שיש בארץ זו). מהו הסכום הגדול ביותר שלא ניתן לשלם בלי צורך בעודף?
ב*. בארץ רחוקה אף יותר יש מטבעות שערכם $7\cdot13$, $7\cdot11$, $11\cdot13$ (וזה הסוג היחיד של כסף שיש בארץ זו). מהו הסכום הגדול ביותר שלא ניתן לשלם בלי צורך בעודף?

10*. הוכיחו כי קיים N טבעי, כך שבין 100 ספרות הימניות של 2^N יש לפחות 50 תשיעיות.

בתיאבון!