<u>תרגיל 9</u>

1. הוכיחו כי 36^n+49^n-1 מתחלק ב-168 עבור כל $n>1$ שלם.

פתרון. $168=8\cdot 3\cdot 7$, לכן מספיק לבדוק שהמספר מתחלק ב-3, ב-7 וב-8.

36 מתחלק ב-3, בנוסף $49=1\pmod 3$, לכן
$$36^n+49^n-1=0+1^n-1=0\pmod 3.$$

36 מתחלק ב-4, לכן 36^n מתחלק ב-16 עבור $n>1$, וגם ב-8.
בנוסף, $49=1\pmod{16}$, לכן $36^n+49^n-1=0+1^n-1=0\pmod 8$ לכל $n>1$.

49 מתחלק ב-7. בנוסף, $36=1\pmod 7$, לכן
$$36^n+49^n-1=1^n+0-1=0\pmod 7 \text{ לכל } n>1.$$
מש"ל.

2. נניח כי $\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n}=1$, כאשר a_i הם מספרים אי-זוגיים שונים. הוכיחו כי n אי-זוגי.

פתרון ראשון. נכפיל במחנה משותף. אז סכום של n מספרים אי-זוגיים זה מספר אי-זוגי. לכן n אי-זוגי.

פתרון שני. ניתן להסתכל מודולו 2. הרי מודולו 2 ניתן לחלק במספרים אי-זוגיים. נקבל סכום של n אחדים שווה 1, לכם $n=1\pmod 2$.

3. מצאו את כל הזוגות (p,q) של מספרים ראשוניים שונים, עבורם $(p-q)^3=p+q$.

תשובה. יש זוג יחיד: (3,5).
פתרון. $p-q=2p\pmod{p+q}$, ולכן
$$8p^3=(2p)^3=(p-q)^3=p+q=0\pmod{p+q}$$
לכן $8p^3$ מתחלק ב-$p+q$, אבל $p+q$ זרים, $p, p+q$ הרי p,q ראשוניים שונים, לכן 8 מתחלק ב-$p+q$. לכן $p+q$ אינו עולה על 8. זה משאיר בדיקה של מעט אפשרויות.

4. נתונים מספרים ראשוניים $p_1<p_2<...<p_{31}$, עבורם $p_1^4+p_2^4+...+p_{31}^4$ מתחלק ב-30. הוכיחו שיש בין מספרים אלה שלושה מספרים ראשוניים עוקבים.

פתרון. במקום להגיד שהמספר מתחלק ב-30, נגיד שהוא מתחלק ב-2, 3, 5.

$p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{31}^4$ מתחלק ב-2, לכן לא יתכן שכל המחוברים אי-זוגיים, לכן גם 2 נמצא ברשימה.

כעת נסתכל מודולו 3. כל מספר ראשוני p הוא 3, או $p=\pm1\pmod 3$. במקרה השני $p^2=1\pmod 3$, ולכן גם $p^4=1\pmod 3$. אם 3 לא נמצא בין 31 המספרים הראשוניים הנתונים, אז $p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{31}^4=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{31\text{ פעמים}}=31=1\pmod 3$, וזה לא יתכן. לכן 3 מופיע ברשימה.

כעת נסתכל מודולו 5. כל מספר ראשוני p הוא 5, או $p\neq 0\pmod 5$. במקרה השני לפי המשפט הקטן של פרמה או לפי בדיקה ישירה $p^4=1\pmod 4$. אם 5 לא נמצא בין 31 המספרים הראשוניים הנתונים, אז

$$p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{31}^4=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{31\text{ פעמים}}=31=1\pmod 5,$$

וזה לא יתכן. לכן 5 מופיע ברשימה.

ובכן, מבין המספרים הנתונים נמצאים 2, 3, 5. אלה 3 מספרים ראשוניים עוקבים.

5. האם הסכום של

(א) 3 ריבועים עוקבים,

(ב) 6 ריבועים עוקבים,

(ג) 11 ריבועים עוקבים

יכול להיות ריבוע שלם?

תשובה. א. לא. ב. לא. ג. כן.

פתרון. נזכיר, כי בהרבה שאלות על ריבועים יש טעם להסתכל מודולו 4 או 8.

א. השאלה היא האם $(n+1)^2+n^2+(n-1)^2=3n^2+2=m^2$ עבור m,n שלמים כלשהם.

אם כך, אז $3\cdot(n^2+1)=m^2+1$.

קל לבדוק כי מודולו 8 כל ריבוע הוא 0, 1 או 4. לכן k^2+1 מודולו 8 שווה ל-1, 2 או 5, לכל k שלם. אם נכפיל מספר מסוג זה ב-3 נקבל 3, 6 או 7 מודולו 8, כלומר לא נקבל שוב מספר מסוג זה.

ב. השאלה היא האם עבור m,n שלמים כלשהם יכול להתקיים:

$$m^2=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2=6n^2+6n+19.$$

אבל $6n^2+6n=6n(n+1)$ חייב להתחלק ב-4, לכן $6n^2+6n+19=3\pmod 4$, לכן זה לא ריבוע.

ג. $m^2=(n-5)^2+\ldots+(n+5)^2=11n^2+2\cdot(1^2+2^2+3^3+4^2+5^2)=11n^2+110$

אז $n=1$ נותן דוגמה: $11^2=11+110$. יכולים לבקש דוגמה נוספת, כי הרצף שלנו מתחיל במספרים שליליים $(-4,-3,\ldots,5,6)$.

ובכן $11n^2+110$ מתחלק ב-11, לכן $11\mid m$, לכן $m^2=(11k)^2=11n^2+110$, לכן
$11\cdot k^2=n^2+10$ מכאן $n^2-1=0\pmod{11}$ ולכן $n=\pm1\pmod{11}$. נציב:
$n=11r\pm1$. אז $11\cdot k^2=(11r)^2\pm22r+1+10$, וניתן לצמצם: $k^2=11r^2\pm2r+1$.
בדיקה של ערכים קטנים של r מובילה אותנו לדוגמה $r=2$, $7^2=44+4+1$.
ואז $n=11\cdot r+1=23$, $m=11\cdot k=77$, אבל הרצף מתחיל מ-$n-5$:
$$18^2+19^2+\ldots+28^2=77^2.$$

6*. מצא את כל הפתרונות בשלמים למשוואה $a^3+c^3=2b^3$.

הערה. שאלה זו מורכבת ויהיה קשה להבין אותה מקריאה בלבד. מומלץ לקחת נייר ולנסות לרשום את הנוסחאות לבד, רק אז יש סיכוי להבין מה מתרחש. מומלץ מדי פעם לעצור את הקריאה ולנסות לעשות חלק מהחישובים לבד.

תשובה. $a=-c,\ b=0$ או $a=b=c$.
פתרון. אם $b=0$ אז $a=-c$.
אם $a=c$ אז גם $b=a$.
נניח מעכשיו כי $b\neq0$, ובנוסף $a\neq c$, ונוכיח, כי זה בלתי אפשרי.
נניח כי $(a,c)=1$. אכן, אם יש מחלק ראשוני משותף ל-a,c, אזי הוא גם מחלק של b, ואפשר לחלק בו את a,b,c בו זמנית. בעזרת מספר פעולות מסוג זה ניתן להגיע למצב בו a,c זרים. אם אין פתרון למקרה זה, אזי אין פתרון גם למקרה הכללי.
ל-a,c יש את אותה הזוגיות. לכן $u=\frac{a+c}{2},\ v=\frac{a-c}{2}$ שלמים. אז $a,c=u\pm v$, ולכן
$$2b^3=a^3+c^3=(u+v)^3+(u-v)^3=2u^3+6v^2u.$$
במילים אחרות, $b^3=u\left(u^2+3v^2\right)$. קל לראות כי $(u,v)=1$.

נבדוק שני מקרים: כאשר u מתחלק ב-3 וכאשר לא מתחלק.

$\boxed{3\nmid u}$ אז, היות ו-$(u,v)=1$ יוצא שגם $\left(u,u^2+3v^2\right)=1$ ולכן שני הגורמים הם חזקות שלישיות: $u=k^3,\ u^2+3v^2=\ell^3$, ואז $3v^2=\ell^3-k^6$, לכן:
$$3v^2=\left(\ell-k^2\right)\left(\ell^2+\ell k^2+k^4\right).$$
נרשום $t=\ell-k^2$. אז t,ℓ,k זרים בזוגות (הרי ℓ זר ל-k).
$$3v^2=t\cdot\left(\left(t+k^2\right)^2+\left(t+k^2\right)k^2+k^4\right)=t\cdot\left(t^2+3tk^2+3k^4\right)$$
בשני האגפים כל מחובר (לאחר פתיחת הסוגריים באגף ימין) פרט ל-t^3 מתחלק ב-3, לכן t מתחלק ב-3. נרשום: $t=3z$.
אז $3v^2=3z\cdot\left(9z^2+9zk^2+3k^4\right)$. האגף הימני מתחלק ב-9, לכן $3\mid v$, כלומר ניתן לרשום $v=3w$, ואז $27w^2=3z\cdot\left(9z^2+9zk^2+3k^4\right)$ ואפשר לצמצם:

$$.3w^2 = z\cdot\left(3z^2+3zk^2+k^4\right)$$

נזכר כי $\left(k,t\right)=1$, וגם $3\mid t$, לכן $3\nmid k$, ולכן הגורם השני באגף ימין אינו מתחלק ב-3, לכן $3\mid z$. נרשום $z=3s$, ונקבל לאחר צמצום $w^2 = s\cdot\left(27s^2+9sk^2+k^4\right)$.

כעת, באגף ימין יש גורמים זרים: כל גורם ראשוני של $s,\ 27s^2+9sk^2+k^4$ חייב להיות גורם משותף של s , k, אך $\left(k,t\right)=\left(k,9s\right)=1$. לכן שני הגורמים במכפלה הם ריבועים שלמים: $s=m^2$, ובנוסף $27m^4+9m^2k^2+k^4=27s^2+9sk^2+k^4=n^2$.

טענה. למשוואה $27m^4+9m^2k^2+k^4=n^2$ אין פתרונות במספרים טבעיים.

אנחנו נוכיח את הטענה בסוף. לכן, נשאר לבדוק את המקרים בהם n, או m, או k מתאפס.
אם $n=0$, אזי $w=0\Rightarrow v=0\Rightarrow a=c$ בסתירה להנחה.
אם $n\neq 0$, אבל $k=0$, מקבלים $27m^4=n^2$ וזה לא אפשרי: בצד שמאל 3 מופיע בחזקה אי-זוגית, ובצד ימין – בחזקה זוגית.
אם $m=0$, אזי $s=m^2=0\Rightarrow z=0\Rightarrow t=0\Rightarrow v=0\Rightarrow a=c$, בסתירה להנחה. לכן, מקרה זה אינו אפשרי (מודולו הטענה שנוכיח בסוף).

$\boxed{3\mid u}$ נזכר במשוואה: $b^3=u\left(u^2+3v^2\right)$. נרשום $u=3q$, ואז גם ברור כי $b=3d$, ולכן $27d^3=9q\left(3q^2+v^2\right)$, או $.3d^3=q\left(3q^2+v^2\right)$

נזכר כי $\left(u,v\right)=1$, ולכן $3\nmid v$. לכן $q=3r$ (הרי האגף השמאלי מתחלק ב-3, ולכן גם הימני), כלומר $d^3=r\left(27r^2+v^2\right)$, כאשר $\left(r,v\right)=1$, כלומר שני הגורמים של אגף ימין זרים. לכן שני הגורמים הם חזקות שלישיות של מספרים שלמים: $r=m^3$, $g^3=27r^2+v^2=27m^6+v^2$. נזכור גם, כי $3\nmid v$, לכן $3\nmid g$. בנוסף, $\left(g,m\right)=1$, כי כל מחלק ראשוני משותף שלהם הוא מחלק משותף של r,v.

נעביר אגפים: $g^3-27m^6=v^2$, או $\left(g-3m^2\right)\left(g^2+3m^2g+9m^4\right)=v^2$.

נסמן $h=g-3m^2$, (גם $3\nmid h$, וגם $\left(g,h\right)=1$), כי כל מחלק ראשוני משותף היה גם מחלק של m). אז, נוכל לרשום $g=h+3m^2$ ולהציב. נקבל:

$$v^2=h\cdot\left(\left(h+3m^2\right)^2+3m^2\left(h+3m^2\right)+9m^4\right)=h\cdot\left(h^2+9m^2h+27m^4\right)$$

הגורמים בצד ימין זרים, ולכן כל אחד מהם הוא ריבוע. נרשום: $h=k^2$, ובנוסף $.k^4+9m^2k^2+27m^4=h^2+9m^2h+27m^4=n^2$

שוב הגענו למשוואה מהטענה: $k^4+9m^2k^2+27m^4=n^2$. הטענה אומרת, כי אין פתרון בטבעיים, לכן n, או m, או k מתאפס.
אם $n=0$, אזי $v=0\Rightarrow a=c$ בסתירה להנחה.
אם $n\neq 0$, אבל $k=0$, מקבלים $27m^4=n^2$ וזה לא אפשרי כמו שכבר הוסבר.
אם $m=0$, אזי $b=0\Rightarrow a+c=0\Rightarrow u=3q=9r=0\Rightarrow r=m^3=0$, בניגוד להנחה.
מש"ל מודולו הטענה.

כעת, לאלו מאיתנו שעדיין לא נכנעו יש המון מוטיבציה להוכיח את הטענה, הרי בשני המקרים השתמשנו בה. נזכיר את הניסוח:
טענה. למשוואה $27m^4+9m^2k^2+k^4=n^2$ אין פתרון במספרים טבעיים.

הוכחת הטענה. נניח, שקיים פתרון בטבעיים. אנחנו נתבונן בפתרון עבורו n הכי קטן. מכאן נובע, כי $(k,m)=1$: אם היה מחלק משותף d, אזי גם $m_2=\frac{m}{d},\ k_2=\frac{k}{d},\ n_2=\frac{n}{d^2}$ היה פתרון עם n יותר קטן, בסתירה להנחה.
בנוסף, $(m,n)=1$, הרי אם היה להם מחלק ראשוני משותף, הוא היה גם מחלק של k.
באופן דומה, אין מחלק ראשוני שונה מ-3 משותף ל-n,k (אחרת, הוא היה גם מחלק של m). מצד שני, אם k מתחלק ב-3, אזי $3^4\mid(9m^2k^2+k^4)$, אך $(m,k)=1$ ולכן $3\nmid m$, מכאן ש: $27m^4+9m^2k^2+k^4$ מתחלק ב-3^3, אך לא ב-3^4, לכן בפירוק של מספר זה לגורמים ראשוניים יש חזקה אי-זוגית של 3, אבל זהו n^2. לכן, לא יתכן גם ש-3 יהיה מחלק ראשוני משותף של n,k, וגם אף ראשוני אחר. לכן $(n,k)=1$. לסיכום: k,m,n זרים בזוגות, $3\nmid k$.

כעת, נתבונן בזוגיות של m,k. לא יתכן ששניהם זוגיים, כי אז הם אינם זרים. מודולו 8 כל ריבוע הוא 0, 1 או 4. לכן אם m,k אי-זוגיים בו-זמנית, אזי:
$$n^2=27m^4+9m^2k^2+k^4\equiv 27+9+1\equiv 5\pmod 8$$
וזה לא אפשרי. אם m אי-זוגי, k זוגי, אזי:
$$n^2=27m^4+9m^2k^2+k^4\equiv 3+0+0\equiv 3\pmod 4$$
וגם זה לא יתכן. נשארת אפשרות אחת: m זוגי, k אי-זוגי (ואז גם n אי-זוגי).

ניתן לכתוב $m=2r$. מכאן: $\frac{n^2}{4}=27\cdot 4r^4+9r^2k^2+\frac{1}{4}k^4$
$$\frac{n^2}{4}=27r^4+81r^4+9r^2k^2+\frac{1}{4}k^4$$
$$\frac{n^2}{4}-\left(9r^2+\frac{k^2}{2}\right)^2=27r^4$$
$$\left(\frac{n+k^2}{2}+9r^2\right)\left(\frac{n-k^2}{2}-9r^2\right)=27r^4$$
שני הגורמים מצד שמאל הינם שלמים. הראשון חיובי, המכפלה חיובית, ולכן גם השני חיובי.
נזכור ש-k,n,r זרים בזוגות (הרי $m=2r$). נסמן $d=\left(\frac{n+k^2}{2}+9r^2,\frac{n-k^2}{2}-9r^2\right)$.
אז $d^2\mid 27r^4$, לכן $d\mid 3r^2$. אבל, $(3m,k)=(6r,k)=1$, ולכן $(d,k)=1$.

מצד שני: $k^2+18r^2=\left(\frac{n+k^2}{2}+9r^2\right)-\left(\frac{n-k^2}{2}-9r^2\right)$, ולכן $d\mid k^2$, מכאן:
$d=1$. לכן, מתקיים אחד מהשניים:

$$\frac{n+k^2}{2}+9r^2=27\alpha^4\ ,\ \frac{n-k^2}{2}-9r^2=\beta^4 \quad (1)$$

או

$$\frac{n+k^2}{2}+9r^2=\alpha^4\ ,\ \frac{n-k^2}{2}-9r^2=27\beta^4 \quad (2)$$

כאשר בכל מקרה α,β הם מספרים טבעיים זרים, $r=\alpha\beta$.

במקרה (1), נקבל $27\alpha^4-\beta^4=k^2+18r^2$. נסתכל מודולו 3. מכיוון ש- $3\nmid k$,
$k^2\equiv 1\pmod 3$, ולכן $\beta^4+1\equiv 0\pmod 3$. אבל, β^4+1 לא יכול להתחלק ב-3,
ולכן מקרה (1) פסול.

במקרה (2), נקבל $\alpha^4-27\beta^4=k^2+18r^2=k^2+18\alpha^2\beta^2$.
אבל, k אי-זוגי, ולכן ל- α,β יש זוגיות שונה.
דרך אחרת לכתוב את המשוואה היא $\alpha^4=k^2+18\alpha^2\beta^2+27\beta^4$.
אם α זוגי, אזי β אי-זוגי, ולכן מודולו 8 השוויון האחרון הוא $0\equiv 1+0+27\pmod 8$,
וזה לא יתכן. מעתה, נניח, כי α אי-זוגי, β זוגי.

$$\alpha^4-18\alpha^2\beta^2+81\beta^4-k^2=27\cdot 4\cdot\beta^4$$
$$\left(\alpha^2-9\beta^2\right)^2-k^2=27\cdot 4\cdot\beta^4$$
$$\left(\frac{\alpha^2-9\beta^2-k}{2}\right)\left(\frac{\alpha^2-9\beta^2+k}{2}\right)=27\beta^4$$
$$\left(\frac{\alpha^2-k}{2}-\tfrac{9}{2}\beta^2\right)\left(\frac{\alpha^2+k}{2}-\tfrac{9}{2}\beta^2\right)=27\beta^4$$

ניקח את $\delta=\left(\frac{\alpha^2-k}{2}-\frac{9}{2}\beta^2,\frac{\alpha^2+k}{2}-\frac{9}{2}\beta^2\right)$.
אז $\delta^2\mid 27\beta^4$, ולכן $\delta\mid 3\beta^2$.
מצד שני, $\delta\left|\left(\frac{\alpha^2+k}{2}-\frac{9}{2}\beta^2\right)-\left(\frac{\alpha^2-k}{2}-\frac{9}{2}\beta^2\right)=k\right.$.
אבל, $1=\left(k,3r\right)=\left(k,3\alpha\beta\right)$, ולכן $k,3\beta^2$ זרים, ומכאן ש: $\delta=1$.

נשים לב כי $\alpha^4-18\alpha^2\beta^2=k^2+27\beta^4>0$, ולכן $\alpha^4-18\alpha^2\beta^2>0$. משום כך:
$\alpha^2>18\beta^2$.

לכן $\alpha^2 > 9\beta^2$, מכאן $\frac{\alpha^2+k}{2}-\frac{9}{2}\beta^2 > 0$. לכן גם $\frac{\alpha^2-k}{2}-\frac{9}{2}\beta^2 > 0$, הרי
מכפלתם חיובית. ובכן, $\frac{\alpha^2 \pm k}{2}-\frac{9}{2}\beta^2$ הם מספרים חיוביים זרים, מכפלתם $27\beta^4$,
ולכן $\beta = \kappa\mu$, $\frac{\alpha^2 \mp k}{2}-\frac{9}{2}\beta^2 = \kappa^4$, $\frac{\alpha^2 \pm k}{2}-\frac{9}{2}\beta^2 = 27\mu^4$.
נחבר: $27\mu^4 + \kappa^4 = \alpha^2 - 9\beta^2$.
כלומר, $27\mu^4 + 9\beta^2 + \kappa^4 = \alpha^2$, או $27\mu^4 + 9\mu^2\kappa^2 + \kappa^4 = \alpha^2$.
זאת אומרת, במקום k,m,n היה אפשר לקחת κ,μ,α.

אבל, $\alpha \le r < m < n$, ולכן n לא היה הכי קטן שניתן לבחור. ניצחון!!!