תרגיל 8

1. הוכיחו כי לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\frac{a^6+a^4+a^2+1}{4}\geq\frac{a^5+a^3+a}{3}$.

פתרון. מספיק להוכיח את אי-השוויון למספרים חיוביים (לשליליים הוא ברור). לכן מעכשיו נניח כי $a>0$.
נכפיל במחנה: צריך להוכיח כי $3\left(a^6+a^4+a^2+1\right)\geq 4\left(a^5+a^3+a\right)$.
נשים לב כי $a^2+1\geq 2a$, לכן גם $a^6+a^4\geq 2a^5$. לכן

$$3\left(a^6+a^4+a^2+1\right)\geq 6\left(a^5+a\right)$$

נשאר להוכיח $6\left(a^5+a\right)\geq 4\left(a^5+a^3+a\right)$.

כלומר $2\left(a^5+a\right)\geq 4a^3$.

נחלק ב-$2a$ (זה חיובי, אז מותר) ונקבל $a^4+1\geq 2a^2$.

זה נכון, הרי $\left(a^2-1\right)^2\geq 0$.

2. בהינתן $abc=1$, $a,b,c\geq 0$.

הוכיחו כי $\frac{a^2}{1+2ab}+\frac{b^2}{1+2bc}+\frac{c^2}{1+2ca}\geq\frac{a}{ab+b+1}+\frac{b}{bc+c+1}+\frac{c}{ca+a+1}$.

פתרון. קיימים $x,y,z>0$ עבורם $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$. נעבור ל-$x,y,z$ (זה בעצם מאפשר להיפתר מהתנאי).

$$\sum_{cyc}\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2}{1+2\cdot\frac{x}{z}}\geq\sum_{cyc}\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1}$$

$$\sum_{cyc}\frac{x^2z}{y^2z+2y^2x}\geq\sum_{cyc}\frac{xz}{y\left(x+y+z\right)}$$

נשתמש באי-שוויון בסגנון קושי-שוורץ: $\sum\frac{x_i^2}{y_i}\geq\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{\sum y_i}$.

$$\sum_{cyc}\frac{x^2z}{y^2z+2y^2x}=\sum_{cyc}\frac{x^4z^4}{x^2y^2z^4+2y^2x^3z^3}\geq\frac{\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)^2}{\sum_{cyc}\left(x^2y^2z^4+2y^2x^3z^3\right)}=$$

$$=\frac{\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)^2}{x^2y^2z^2\sum_{cyc}\left(z^2+2xy\right)}=\frac{\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)^2}{x^2y^2z^2\left(x+y+z\right)^2}$$

כעת מספיק להוכיח כי

$$\frac{\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)^2}{x^2y^2z^2\left(x+y+z\right)^2}\geq\sum_{cyc}\frac{xz}{y\left(x+y+z\right)}\left(=\frac{1}{xyz\left(x+y+z\right)}\sum_{cyc}x^2z^2\right)$$

נצמצם: $\frac{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}{xyz\left(x+y+z\right)}\geq 1$.

נכפיל במחנה ונפתח סוגריים: $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2$.

נשים לב, כי $\left(xy-xz\right)^2\geq 0$ ולכן $x^2y^2+x^2z^2-2x^2yz\geq 0$ ולכן $x^2y^2+x^2z^2\geq 2x^2yz$. סכום של שלוש אי-שוויונים מסוג זה ייתן את מה שרצינו להוכיח.

3. בהינתן $x,y,z\geq 0$ הוכיחו $\frac{x}{1+x+xy}+\frac{y}{1+y+yz}+\frac{z}{1+z+zx}\leq 1$.

פתרון. נכפיל במחנה ונפתח סוגריים.

$$\sum_{cyc}x\left(1+y+yz\right)\left(1+z+zx\right)\leq\left(1+x+xy\right)\left(1+y+yz\right)\left(1+z+zx\right)$$

$$\sum_{cyc}\left(x+xy+xz+2xyz+x^2z+xyz^2+x^2yz+x^2yz^2\right)\leq$$

$$\leq 1+x+y+z+2\left(xy+xz+yz\right)+\left(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y\right)+xyz+$$

$$+2\left(x^2yz+y^2xz+z^2xy\right)+\left(x^2y^2z+x^2yz^2+xy^2z^2\right)+x^2y^2z^2$$

נצמצם ונקבל: $5xyz\leq 1+\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)+x^2y^2z^2$

לפי אי-שוויון הממוצעים $xyz\leq\frac{1+x^2y+y^2z+z^2x+x^2y^2z^2}{5}$.

4. נתון פולינום $p\left(x\right)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+1$ בעל מקדמים ממשיים, שכל השורשים שלו מספרים ממשיים קטנים מ-0. הוכיחו כי $p\left(2\right)\geq 3^n$.

פתרון ראשון. עם השורשים הם $-\lambda_1,-\lambda_2,...,-\lambda_n$ אז $p\left(x\right)=\left(x+\lambda_1\right)\cdot...\cdot\left(x+\lambda_n\right)$.
במקרה שלנו גם נתון כי $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n>0$, וגם $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot...\cdot\lambda_n=1$.
אז בעצם צריך להוכיח $\left(2+\lambda_1\right)\left(2+\lambda_2\right)\cdot...\cdot\left(2+\lambda_n\right)\geq 3^n$.
זה נובע מאי-שוויון: עבור מספרים חיוביים $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n$ מתקיים:

$$\left(a_1+b_1\right)\left(a_2+b_2\right)\cdot...\cdot\left(a_n+b_n\right)\geq\left(\sqrt[n]{a_1a_2\cdot...\cdot a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdot...\cdot b_n}\right)^n$$

מחלק את שני האגפים ב- $b_1b_2\cdot...\cdot b_n$ ונסמן $x_i=\frac{a_i}{b_i}$, ונקבל

$$\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)\cdot...\cdot\left(x_n+1\right)\geq\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdot...\cdot x_n}+1\right)^n$$

אי-שוויון זה נקרא אי-שוויון הויגנס. על מנת להוכיח אותו נפתח סוגריים:

$$1+\sigma_1+\sigma_2+...+\sigma_n\geq\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x_1x_2\cdot...\cdot x_n\right)^{k/n}$$

כאשר σ_k הם פולינומי וייטא מדרגה k . נשים לב שב- σ_k יש $\binom{n}{k}$ מחוברים שכולם מדרגה k .

ממוצע חשבוני של מחוברים אלה הוא $\sigma_k \Big/ \binom{n}{k}$, וממוצע הנדסי הוא $\left(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\right)^{k/n}$, לכן לפי אי-שוויון הממוצעים $\sigma_k \Big/ \binom{n}{k} \geq \left(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\right)^{k/n}$ ולכן $\sigma_k \geq \binom{n}{k} \cdot \left(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\right)^{k/n}$. נחבר אי-שוויונים אלה ונקבל מש"ל.

פתרון שני (דור שמויש). לפי אי-שוויון הממוצעים,

$$\prod_{i=1}^{n}(2+\lambda_i)=\prod_{i=1}^{n}(1+1+\lambda_i)\geq\prod_{i=1}^{n}\left(3\cdot\sqrt[3]{\lambda_i}\right)=3^n\cdot\sqrt[3]{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}=3^n$$

5. לכל $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ הוכיחו

$$4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)+3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2\geq 4\left(a+b+c+d\right)\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right).$$

פתרון. אם נחליף את כל המספרים לערכים המוחלטים שלהם, זה יכול רק להגדיל את האגף הימני ולא יזיז את השמאלי, לכן ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות שכל המספרים אי-שליליים.



כעת נשתמש בכוח הברוטאלי של **שיטת הבאפולו**.
אי-שוויון הומוגני (אם נחליף את a,b,c,d ב-$\lambda a,\lambda b,\lambda c,\lambda d$ שום דבר לא ישתנה: שני האגפים יוכפלו ב-λ^4). לכן אם d שונה מ-0, ניתן לבחור λ עבורו d יהפוך ל-1, ואז a,b,c יהפכו ל-$1+x,1+y,1+z$, והאי-שוויון יקבל צורה:

$$4\left((1+x)^4+(1+y)^4+(1+z)^4+1\right)+3\left((1+x)^2+(1+y)^2+(1+z)^2+1\right)^2\geq$$
$$\geq 4\left((1+x)+(1+y)+(1+z)+1\right)\left((1+x)^3+(1+y)^3+(1+z)^3+1\right)$$

נפתח סוגריים:

$$4\left(4+4\sum_{cyc}x+6\sum_{cyc}x^2+4\sum_{cyc}x^3+\sum_{cyc}x^4\right)+3\left(4+2\sum_{cyc}x+\sum_{cyc}x^2\right)^2\geq$$
$$\geq 4\left(4+\sum_{cyc}x\right)\left(4+3\sum_{cyc}x+3\sum_{cyc}x^2+\sum_{cyc}x^3\right)$$

$$4\left(4+4\sum_{cyc}x+6\sum_{cyc}x^2+4\sum_{cyc}x^3+\sum_{cyc}x^4\right)+$$
$$+3\left(16+16\sum_{cyc}x+12\sum_{cyc}x^2+8\sum_{cyc}xy+4\sum_{cyc}x^3+4\sum_{sym}x^2y+\sum_{cyc}x^4+2\sum_{cyc}x^2y^2\right)\geq$$
$$\geq 4\left(16+16\sum_{cyc}x+15\sum_{cyc}x^2+6\sum_{cyc}xy+7\sum_{cyc}x^3+3\sum_{sym}x^2y+\sum_{cyc}x^4+\sum_{sym}x^3y\right)$$

$$\boxed{64+64\sum_{cyc}x+60\sum_{cyc}x^2+24\sum_{cyc}xy+28\sum_{cyc}x^3+12\sum_{sym}x^2y}+7\sum_{cyc}x^4+6\sum_{cyc}x^2y^2\geq$$

$$\geq\boxed{64+64\sum_{cyc}x+60\sum_{cyc}x^2+24\sum_{cyc}xy+28\sum_{cyc}x^3+12\sum_{sym}x^2y}+4\sum_{cyc}x^4+4\sum_{sym}x^3y$$

$$3\sum_{cyc}x^4+6\sum_{cyc}x^2y^2\geq 4\sum_{sym}x^3y$$

נזכיר כי $(x-y)^4=x^4+y^4+6x^2y^2-4x^3y-4y^3x$, ולכן את האי-שוויון שהתקבל ניתן לרשום כך: $\sum_{cyc}x^4+\sum_{cyc}(x-y)^4\geq 0$ וזה נכון ללא ספק, כי חזקה רביעית של מספר תמיד גדולה או שווה ל-0.

הערה. בד"כ בשיטת הבאפולו לוקחים את המספר d להיות קטן מבין המשתנים, ואז $x,y,z\geq 0$, והיינו יכולים להשתמש בזה לאחר פתיחת סוגריים. אבל אנחנו לא זקוקים לזה – האי-שוויון שקיבלנו בסוף הוא עובד לכל $x,y,z\in\mathbb{R}$. יותר מזה, אם היינו דורשים ש-d הוא המספר הקטן ביותר, היינו צריכים לטפל בנפרד במקרה ש-$d=0$. כרגע אנחנו יכולים להניח ש-$d\neq 0$, ואם לא אז נחליף שמות של משתנים, ואם כל המשתנים a,b,c,d מתאפסים אז הטענה ברורה.

6*. בהינתן: $a,b,c,d>0$, $a\cdot b\cdot c\cdot d=1$, הוכיחו:

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}+2\geq ab+ac+ad+bc+bd+cd.$$

פתרון. אנחנו נשתמש מספר פעמים בטריק: ***סכום שני ריבועים כפול סכום שני ריבועים שווה לסכום שני ריבועים:*** $(p^2+q^2)(m^2+n^2)=(pm-qn)^2+(pn+qm)^2$.

טריק זה כשור לכפל מספרים מרוכבים: מכפלת האורכים של שני מספרים מרוכבים שווה לאורך המכפלה, ויש לו שימושים גם בתורת המספרים וגם באלגברה. ניתן לבדוק שזה עובד על ידי פתיחת סוגריים ומומלץ לעשות זאת לפני שממשיכים לקרוא. בפרט,

$$(a^2+1)(b^2+1)=(ab-1)^2+(a+b)^2$$
$$(c^2+1)(d^2+1)=(cd-1)^2+(c+d)^2$$

וגם

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)=\left((ab-1)^2+(a+b)^2\right)\left((c+d)^2+(cd-1)^2\right)=$$
$$=\left((ab-1)(c+d)+(a+b)(cd-1)\right)^2+\left((c+d)(a+b)-(ab-1)(cd-1)\right)^2\geq$$
$$\geq\left((c+d)(a+b)-(ab-1)(cd-1)\right)^2$$

לכן

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}+2\geq\sqrt{\left((c+d)(a+b)-(ab-1)(cd-1)\right)^2}+2=$$
$$=(c+d)(a+b)-(ab-1)(cd-1)+2=ac+ad+bc+bd+ab+cd-abcd-1+2=$$
$$=ab+ac+ad+bc+bd+cd$$

(הרי $abcd=1$). מש"ל.