תרגיל 7

1. למרובעים $ABCD$ ו-$EFGH$ זוויות שוות בין האלכסונים. הוכיחו: יחס שטחיהם הוא כמו יחס בין מכפלות האלכסונים, כלומר $\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}}=\frac{AC\cdot BD}{EG\cdot FH}$. (חשוב לשים לב, שהטענה מתקיימת גם למרובעים לא קמורים.)

פתרון. נניח כי X נקודת חיתון האלכסונים של $ABCD$, Y נקודת חיתוך האלכסונים של $EFGH$. נסמן ב- d_A,d_C מרחקים מ-A,C בהתאמה לישר BD. כמו כן, נסמן ב- d_E,d_G את המרחקים מ-E,G לישר FH. אזי $\frac{d_A}{AX}=\frac{d_C}{CX}=\frac{d_E}{EY}=\frac{d_G}{GY}$, וזה היחס בין ניצב ליתר במשולשים ישרי זווית דומים – הזווית מול הניצב שווה לזווית בין האלכסונים (בעצם זה סינוס של הזווית, אבל לא צריך סינוסים בשביל להבין שהם שווים). את היחס הזה נסמן δ (ואז למשל $h_A=\delta\cdot AX$).

אם הנקודות A,C נמצאים בצדדים שונים של הישר BD, אז שטח המרובע הוא

$$S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}=$$

$$=\frac{BD\cdot h_A}{2}+\frac{BD\cdot h_C}{2}=\frac{BD\cdot\left(h_A+h_C\right)}{2}=\frac{BD\cdot\left(\delta\cdot AX+\delta\cdot CX\right)}{2}=\frac{\delta\cdot AC\cdot BD}{2}$$

אם A,C נמצאים באותו צד של BD, אז שטח המרובע הוא

$$S_{ABCD}=\left|S_{ABD}-S_{BCD}\right|=$$

$$=\left|\frac{BD\cdot h_A}{2}-\frac{BD\cdot h_C}{2}\right|=\frac{BD\cdot\left|h_A-h_C\right|}{2}=\frac{BD\cdot\left|\delta\cdot AX-\delta\cdot CX\right|}{2}=\frac{\delta\cdot AC\cdot BD}{2}$$

בכל מקרה, $S_{ABCD}=\frac{\delta\cdot AC\cdot BD}{2}$. באופן דומה $S_{EFGH}=\frac{\delta\cdot EG\cdot FH}{2}$. מכאן מש"ל.

2. במשושה $ABCDEF$ הצלעות הנגדיות מקבילות: ז. א. $AB\|DE$, $BC\|EF$, $FA\|CD$. הוכיחו כי $S_{ACE}=S_{BDF}$.

פתרון. נשלים משולשים ABC, CDE, EFA למקביליות $ABCX$, $CDEY$, $EFAZ$. נשים לב כי הצלעות של מקביליות מתלכדות באופן חלקי (למשל חלק מ-EZ מתלכד עם חלק מ-EY, והמשושה מתחלק ל-3 מלבנים ומשולש XYZ. הישרים AC, CE, EA, חוצים את המקביליות המתאימות, לכן רק מחצית משטח המקביליות מוכל במשולש ACE, ולכן $S_{ACE}=\frac{1}{2}\left(S_{ABCDEF}+S_{XYZ}\right)$.

הקטעים EY, EZ מתחילות באותה נקודה E, והולכות באותו כיוון לפי הגדרתם, שמקביל לכיוון $FA\|CD$, ולכן $YZ=\left|EY-EZ\right|=\left|FA-CD\right|$. באופן דומה גם XY, XZ שווים להפרשים של צלעות נגדיות של $ABCDEF$. לכן S_{ACE} מתקבל מהמשושה בתור הפרש בין שטחו לבין שטח המשולש שצלעותיו $\left|FA-CD\right|,\left|BC-EF\right|,\left|AB-DE\right|$.

באופן דומה, גם S_{BDF} מחושב לפי אותה נוסחה. לכן $S_{BDF}=S_{ACE}$. מש"ל.

3. נתון משושה קמור $ABCDEF$.
א. אם אמצעי האלכסונים AC, BD, CE, DF, FA, EB בסדר זה יוצרים משושה קמור, הוכיחו כי שטח המשושה החדש שווה ל- $\frac{1}{4}S_{ABCDEF}$.
ב. האם הקמירות חשובה בסעיף הקודם?
ג. הכלילו את סעיף א': מה יקרה אם מחלקים כל האלכסונים לא ביחס 1:1, אלה ביחס נתון α?

א. נסמן ב-I, J, K, L, M, N את אמצעי AC, BD, CE, DF, EA, FB בהתאמה.

פתרון ראשון. מתכונת הקטע האמצעי במשולש $IK=\frac{1}{2}\cdot AE$, $JL=\frac{1}{2}\cdot BF$, ולכן לפי מה שהוכחנו בשאלה הראשונה $\frac{S_{IJKL}}{S_{FEBA}}=\frac{1}{4}$.
כלומר $S_{IJKL}=\frac{1}{4}\cdot S_{EFAB}$, ובאופן דומה $S_{LMNI}=\frac{1}{4}\cdot S_{BCDE}$.
לכן $S_{IJKLMN}=S_{IJKL}+S_{LMNI}=\frac{1}{4}\cdot S_{EFAB}+\frac{1}{4}\cdot S_{BCDE}=\frac{1}{4}\cdot S_{ABCDEF}$.

פתרון שני. נשתמש בגיאומטריה אנליטית.
נסמן $A_1=A,\ A_2=B,\ A_3=C,\ A_4=D,\ A_5=E,\ A_6=F$.
שטח של מצולע $A_1A_2...A_n$ שקודקודיו נתונים בקואורדינאטות מחושב לפי נוסחא $\pm S_{A_1A_2...A_n}=\frac{1}{2}\cdot\left(\left[A_1,A_2\right]+\left[A_2,A_3\right]+...+\left[A_{n-1},A_n\right]+\left[A_n,A_1\right]\right)$, כאשר $\left[,\right]$ זה סימון מקוצר לנוסחה $\left[U,V\right]=x_U y_V-x_V y_U$. הביטוי $\left[,\right]$ הוא **ביליניארי**: כלומר $\left[S+U,V\right]=\left[S,V\right]+\left[U,V\right]$, וגם $\left[U,V+T\right]=\left[U,V\right]+\left[U,T\right]$, **ואנטיסימטרי**, כלומר $\left[U,V\right]=-\left[V,U\right]$.
נסמן את הקואורדינאטות $A=\left(x_1,y_1\right),\ B=\left(x_2,y_2\right),...$, ולשם קיצור נניח כי $x_{n+6}=x_n,\ y_{n+6}=y$. אז $\pm S_{ABCDEF}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{6}\left(x_k y_{k+1}-y_k x_{k+1}\right)=S$.
הקודקודים של המצולע השני הם $\left(\frac{x_k+x_{k+2}}{2},\frac{y_k+y_{k+2}}{2}\right)$, ושטחו

$$\pm S_{IJKLMN}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{6}\left[\frac{A_k+A_{k+2}}{2},\frac{A_{k+1}+A_{k+3}}{2}\right]=$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=1}^{6}\left(\left[A_k,A_{k+1}\right]+\left[A_k,A_{k+3}\right]+\left[A_{k+2},A_{k+1}\right]+\left[A_{k+2},A_{k+3}\right]\right)=$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=1}^{6}\left[A_k,A_{k+1}\right]+\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=1}^{6}\left[A_k,A_{k+3}\right]-\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=1}^{6}\left[A_{k+1},A_{k+2}\right]+\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=1}^{6}\left[A_{k+2},A_{k+3}\right]=$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=1}^{6}\left[A_k,A_{k+1}\right]+\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=1}^{3}\left(\left[A_k,A_{k+3}\right]+\left[A_{k+3},A_{k+6}\right]\right)-\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=1}^{6}\left[A_k,A_{k+1}\right]+\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=1}^{6}\left[A_k,A_{k+1}\right]=$$

$$=\frac{S}{4}+\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=1}^{3}\left(\left[A_k,A_{k+3}\right]-\left[A_k,A_{k+3}\right]\right)-\frac{S}{4}+\frac{S}{4}=\frac{S}{4}+\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=1}^{3}0=\frac{S}{4}$$

ב. לא צריך קמירות באף אחד מהפתרונות שהצגנו, אבל צריך לדרוש שאף מצולע לא יחתוך את עצמו.

ג. פתרון ראשון. נכליל את הפתרון השני של סעיף א'. במקום נקודות $\frac{A_k+A_{k+2}}{2}$ לוקחים $\frac{\alpha A_k+A_{k+2}}{\alpha+1}$, והנוסחה מקבלת צורה קצת אחרת:

$$\pm S_{IJKLMN}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{6}\left[\tfrac{\alpha}{\alpha+1}A_k+\tfrac{1}{\alpha+1}A_{k+2},\ \tfrac{\alpha}{\alpha+1}A_{k+1}+\tfrac{1}{\alpha+1}A_{k+3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{6}\left(\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+1}\right)^2\cdot\left[A_k,A_{k+1}\right]+\tfrac{\alpha}{(\alpha+1)^2}\cdot\left[A_k,A_{k+3}\right]+\tfrac{\alpha}{(\alpha+1)^2}\cdot\left[A_{k+2},A_{k+1}\right]+\tfrac{1}{(\alpha+1)^2}\cdot\left[A_{k+2},A_{k+3}\right]\right)=$$

$$=\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+1}\right)^2\cdot S+\frac{1}{2}\cdot\tfrac{\alpha}{(\alpha+1)^2}\sum_{k=1}^{3}\left(\left[A_k,A_{k+3}\right]+\left[A_{k+3},A_{k+6}\right]\right)-\tfrac{\alpha}{(\alpha+1)^2}\cdot S+\tfrac{1}{(\alpha+1)^2}\cdot S=\tfrac{\alpha^2-\alpha+1}{(\alpha+1)^2}\cdot S$$

פתרון שני. כל נקודה על קטע AC שמחלקות אותו ביחס α ניתן לכתוב בתור $\lambda A+\left(1-\lambda\right)C$ כאשר $\lambda=\frac{\alpha}{1+\alpha}$. אבל בואו ננסה לפתח נוסחה כפונקציה של λ.
אז קואורדינאטות של כל 6 קודקודי המצולע תלויים ליניארית ב-λ, נוסחא לשטח היא ריבועית, לכן נקבל פונקציה ריבועית $a\lambda^2+b\lambda+c$. כאשר $\lambda=0$ או $\lambda=1$, המצולע שנוצר זהה למצולע המקורי, לכן מקבלים S. כאשר $\lambda=\frac{1}{2}$, מקבלים $\frac{S}{4}$. זה מספיק: פולינום ריבועי נקבע על ידי 3 ערכים. הפולינום $S\cdot\left(1-3\lambda\left(1-\lambda\right)\right)$ נותן ערכים $S,\frac{S}{4},S$ בנקודות $0,\frac{1}{2},1$ בהתאמה. נציב $\lambda=\frac{\alpha}{1+\alpha}$ ונקבל את התשובה.

4. במשולש ABC נבחרו הנקודות K, L, M על הצלעות BC, AC, AB בהתאמה.
הוכיחו כי $S_{KLM}=\frac{AM\cdot BK\cdot CL+AL\cdot BM\cdot CK}{4R}$.

פתרון. נסמן $S=S_{ABC}=\frac{abc}{4R}$.

למשולשים ABC, ALM יש זווית משותפת ב-A, לכן $\frac{S_{ALM}}{S_{ABC}}=\frac{AL\cdot AM}{AB\cdot AC}$.

לכן $S_{ALM}=S\cdot\frac{AL\cdot AM}{AB\cdot AC}$. ניתן להניח כי $AB=c,\ AC=b,\ BC=a$, ובנוסף נניח כי $BM=cw,\ MA=c\left(1-w\right),\ AL=bv,\ LC=b\left(1-v\right),\ CK=aw,\ KB=a\left(1-w\right)$.

באמצעות סימונים אלה, $S_{ALM}=S\cdot\frac{bv\cdot c(1-w)}{c\cdot b}=S\cdot v(1-w)$, ובאופן דומה מתקבל $S_{BKM}=S\cdot w(1-u),\ S_{CKL}=S\cdot u(1-w)$.

ולכן

$$S_{KLM}=S_{ABC}-S_{AML}-S_{BKM}-S_{CLK}=S\big(1-v(1-w)-w(1-u)-u(1-v)\big)=$$
$$=S\cdot\big(1-u-v-w+uv+uw+vw\big)=\frac{abc}{4R}\cdot\big((1-u)(1-v)(1-w)+uvw\big)=$$
$$=\frac{a(1-u)\cdot b(1-v)\cdot c(1-w)}{4R}+\frac{au\cdot bv\cdot cw}{4R}=\frac{AM\cdot BK\cdot CL}{4R}+\frac{AL\cdot BM\cdot CK}{4R}$$

5. במרובע נתונים הזווית בין האלכסונים $\phi\neq 90^\circ$ ואורכי הצלעות a,b,c,d בסדר זה. מצאו נוסחה לשטח המרובע באמצעות a,b,c,d,ϕ.

תשובה. $\frac{\tan\phi}{2}\cdot\left|d^2-c^2+b^2-a^2\right|$.

פתרון. המרובע הוא $ABCD$, ונניח כי $AB=a,\ BC=b,\ CD=c,\ DA=a$, ואלכסוניו $AC=e,\ BD=f$. יהיו P,Q הטלות של A,C על BD. אז לפי משפט פיתגורס

$$d^2-a^2=AB^2-DA^2=PB^2-PD^2=(PB-DP)(PB+DP)=(PB-DP)\cdot f$$

השוויון הימני מתקיים כמובן רק בקטעים מכוונים, אחרת היינו צריכים לחלק למקרים.

$$c^2-b^2=CD^2-CB^2=QB^2-QD^2=(QB-QP)(QB+QP)=(QB-DQ)\cdot f$$

ולכן $\frac{c^2-b^2}{f}=QB-DQ$, $\frac{d^2-a^2}{f}=PB-DP$. ההפרש בין שני משוואות אלה:

$$\frac{d^2-c^2+b^2-a^2}{f}=(PB-DP)-(QB-DQ)=$$
$$=(PB-QB)+(DQ-DP)=PQ+PQ=2\cdot PQ$$

לפי נוסחה משאלה 1, השטח הוא $S=\frac{1}{2}\cdot e\cdot f\cdot\sin\phi$.

אם נזיז את הקטע AC, כך ש-C יתלכד עם Q, אז A יעבור לנקודה T. המשולש TPQ הוא ישר זווית: הזווית P ישרה, הזווית Q היא ϕ, היתר $TQ=AC=e$ ולכן

$$TP=e\cdot\sin\phi,\quad PQ=e\cdot\cos\phi.$$

$$S=\tfrac{1}{2}\cdot e\cdot f\cdot\sin\phi=\tfrac{1}{2}\cdot|PQ|\cdot f\cdot\frac{\sin\phi}{\cos\phi}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left|d^2-c^2+b^2-a^2\right|}{f}\cdot f\cdot\tan\phi=\frac{\tan\phi}{2}\cdot\left|d^2-c^2+b^2-a^2\right|$$

הערה. כאשר $\phi=90^\circ$, לא ניתן לחשב את השטח על סמך הצלעות. במקרה זה $d^2-c^2+b^2-a^2\equiv 0$, ואפשר לשנות את המצולע ואת שטחו בלי לשנות את צלעותיו.

6. ABC משולש, O מרכז המעגל החוסם שלו, ו-P נקודה נוספת במישור. עקבי האנכים מנקודה P לישרי הצלעות של משולש ABC הם $U,\ V,\ W$. מצאו נוסחא עבור S_{UVW} באמצעות R = הרדיוס מעגל החוסם של ABC, $d=OP$, ושטח המשולש המקורי $S=S_{ABC}$ (לא נתון שום גודל נוסף פרט ל-$S,\ R,\ d$).

פתרון. משפט סימסון אומר, שאם P נמצאת על המעגל החוסם של ABC, אז U, V, W נמצאות על ישר אחד ושטח של משולש UVW מתאפס. את הפתרון ניתן לראות בתרגילים שלי מתשע"א, תרגיל 10 (תרגיל בחשבון זוויות), שאלה 5 א'.

כאשר P מתלכד אם O, אז השטח הוא $\frac{S}{4}$.

כאת נתבונן בישר שעובר דרך O, ונזיז את P במהירות קבוע לאורך הישר. אז גם ההיטלים U, V, W יזוזו במהירות קבועה. בתוך ישר זה, מיקום של נקודה P ניתן לבטא על ידי מספר ממשי x שהוא d בצד אחד של O, $-d$ בצד השני. מכיוון ש-U, V, W תלויות ליניארית ב-x, ולכן השטח הוא פולינום מדרגה שנייה ב-x.

אבל אנחנו יודעים ערכים בשלוש נקודות: ב-$-R,\ 0,\ R$ מקבלים $0,\ \frac{S}{4},\ 0$ בהתאמה, וזה קובע את הפונקציה הריבועית בכל הישר הממשי: $\frac{S}{4R^2}\cdot\left(R^2-x^2\right)$. מכיוון ש-$|x|=d$ ניתן להחליף את x^2 ב-d^2.

אם רוצים שטח לא מכוון, צריכים לקחת ערך מוחלט ונקבל תשובה $\boxed{\frac{S}{4R^2}\cdot\left|R^2-d^2\right|}$.

מכיוון שדרך כל נקודה במישור ומרכז של מעגל ניתן להעביר קו ישר, נוסחא זאת מתקיימת לכל נקודות המישור.