<u>תרגיל 6</u>

1. במעגל רשומים N מספרים שלמים. כל דקה מחליפים את כל המספרים בו-זמנית: מחליפים כל מספר בערך מוחלט של ההפרש בינו לבין השכן שלו נגד כיוון השעון.
א. הוכח כי עבור $N = 4$ לאחר זמן מה יישארו רק אפסים.
ב. האם זה נכון גם ל- $N = 3$?
ג. לאיזה ערכים של N ניתן לטעון שיישארו רק אפסים אחרי מספר סופי של מהלכים?

תשובה. חזקות של 2
פתרון. קודם כל, החל מהדקה השנייה כל המספרים יהיו אי-שליליים. לכן ניתן לדבר על המצב בו יש מספרים אי-שליליים בלבד.
דבר שני, $|a-b| \le \max(a,b)$, לכן מקסימום של המספרים במעגל אינו עולה מדקה לדקה (החל מהדקה השנייה). לכן זה משחק שעלולים להופיע בו רק מספר סופי של מצבים.

דבר שלישי: אם נצליח להוכיח עבור N מסוים, שאחרי מספר מהלכים כל המספרים יהיו זוגיים, אז יהיה ניתן לחלק את כל המספרים ב-2 (בלי לשנות את מהות המשחק), ומקסימום של המספרים במעגל ירד פי 2. אבל אחרי עוד מספר סופי של פעמים כל המספרים שוב יהפכו לזוגיים (או במשחק המקורי יתחלקו ב-4) וכו', ואז אחרי מספר סופי של פעמים נגיע למצב בו כל המספרים שווים ל-0.
להפך, אם יש N מסוים עבורו יתכן שלעולם לא נהפוך את כל המספרים לזוגיים, אז גם לא נגיע למצב שבו כל המספרים מתאפסים.
לכן בעצם, מספיק לסדוק מה קורה למספרים במעגל מודולו 2.

עבור N אי-זוגי: נניח שבמעגל רשומים מספרים שכולם אפסים או אחדים, אבל לא כולם אותו דבר. חייבים להיות גם שני מספרים שונים זה ליד זה, וגם שני מספרים זהים זה ליד זה (אם ליד כל 0 יש אחדים וליד כל 1 יש אפסים, אז N זוגי). לכן גם במהלך הבא יהיו גם אפסים וגם אחדים. לכן תמיד יהיו גם אפסים וגם אחדים, ולעולם לא נגיע למצב של רק אפסים.

עבור $N = 2K$ זוגי: נתבונן במה שקורה מודולו 2 לכל המספרים במעגל. אז ניתן לרשום $|a-b| = a-b = a+b \pmod 2$, הרי לכל x מתקיים $x = -x \pmod 2$.
לכן אם במעגל נמצאים המספרים a,b,c בסדר זה נגד כיוון השעון, אז כעבור דקה נקבל $a+b, b+c$ וכעבור 2 דקות נקבל $a+2b+c = a+c \pmod 2$ במקום בו היה a.
לכן, אם נסתכל על מה שקורה כל 2 דקות, אז המעגל של המקומות הזוגיים עובר תהליך נפרד ממעגל של המקומות האי-זוגיים, ותהליך זה מודולו 2 זהה לחלוטין לתהליך המקורי עבור מעגל שגודלו K במקום N (להתבונן במה שמתרחש כל שתי דקות במקום כל דקה זה שאלה שקולה, כי אם ברגע מסוים מגיעים למצב של אפסים בלבד, אז המצב הזה ישמר). לכן אם עבור K תמיד מגיעים לאפסים, אז גם עבור $N = 2K$ יש דוגמה נגדית, ואם עבור K יש דוגמה נגדית, אז יש גם עבור N (פשוט מעתיקים את מספרי הדוגמה הנגדית עבור K למקומות הזוגיים, ורושמים מספרים כלשהם במקומות האי-זוגיים).
מצאנו דוגמה נגדית לכל מספר אי-זוגי, לכן יש דוגמה גם לכל מספר שאינו חזקה של 2.
עבור $N = 2$ המשחק מגיע לאפסים תוך 2 דקות, לכן הוא מגיע לאפסים גם עבור $N = 2^n$.

2. בתור נמצאים N אנשים, שלכל אחד מהם יש כרטיס. הכרטיסים ממוספרים מ-1 עד N אבל אף אחד לא עומד במקום שמתאים לכרטיס שלו. הסדרן יכול להחליף מקומות של שני אנשים עוקבים בתור, בתנאי שאף אחד מהם לא עומד במקום המיועד לו לפי הכרטיס. האם הוא תמיד יכול לגרום למצב שכולם יענדו לפי הסדר של הכרטיסים, לאחר מספר החלפות מסוג זה?

פתרון. למען קיצור, אנחנו ניתן לאנשים שמות לפי מספרי הכרטיסים שלהם (נגיד לבן אדם שיש לו כרטיס 1 נקרא 1).
ננסה להעביר את N לסוף התור (שזה המקום המיועד לו). ניתן פשוט להחליף אותו אם כל מי שעומד מאחוריו, אבל כך אנחנו עלולים להחזיר מישהו למקומו, שזה ימנע מאיתנו לסדר את התור המשך. לכן אנחנו נחליף את N עם זה שמאחוריו בתור, כל עוד שזה לא מחזיר את האיש שמאחוריו למקומו המיועד לפי הכרטיס. אם N נמצא במקום K ומאחוריו נמצא K (במקום K+1), אנחנו לא מיד נחליף אותם, אלה קודם ננסה להחליף את K אם זה שמאחוריו בתור, אלה אם כן מאחורי K נמצא K+1 (במקום K+2) כי אז הוא יחזור למקום וזה עלול למנוע מאיתנו לעשות דברים בהמשך. בצורה כזאת נמשיך ללכת לכיוון סוף התור, כל עוד במקום K+J+1 נמצא איש מספר K+J.
יש שני אפשרויות: או שכך נגיע לסוף התור, או שמתישהו, במקום K+L+1 נמצא איש M שאינו K+L. אם כך, נחליף בין M לאנשים K+L–1, K+L–2, ..., K בלי שהוא יחזור למקומו, ואז נוכל לקדם את N לכיוון של סוף התור בלי להחזיר אף איש למקום המיועד לו.
האפשרות השנייה: מאחורי N עומדים K, K+1, ... N–1 בסדר זה. במקרה זה נוכל להחליף את N עם כל מי שעומד מאחוריו, אבל אז גם דל האנשים מ-K ועד N–1 יחזור למקומם המיועד.
בכל מקרה, אחרי מספר מהלכים, N יחזור למקומו המיועד בסוף, ואולי עוד מספר אנשים בסוף התור יחזרו למקומם ברצף מ-K עד N, אבל כל האנשים עד לתחילת הרצף הזה ישבו במקומות הלא מיועדים להם. אבל את כל האנשים בתחילת התור נוכל לסדר לפי הנחת האינדוקציה.

3. בקופסה נמצאים 1000 כרטיסים ממוספרים מ-1 עד 1000 (בסדר זה). בנוסף, יש K קופסאות ריקות. בכל מהלך מותר לקחת כרטיס אחד מלמעלה של קופסה מסוימת, ולהניח אותו בקופסה ריקה, או על הכרטיס שמספרו גדול ב-1. עבור איזה ערך K הקטן ביותר ניתן יהיה להעביר את כל הכרטיסים מהקופסה המקורית לקופסה אחרת?

תשובה: $K = 11$
פתרון. אנחנו נוכיח באינדוקציה, שעל מנת להעביר N כרטיסים, צריך K קופסאות ריקות נוספות כאשר $N < 2^K$ (כלומר שאם אי-שוויון מתקיים, אז אפשר להעביר, ואם לא, אז לא). בסיס האינדוקציה: קל לראות, שאם יש רק קופסה ריקה אחת, אז השאלה פתירה אך ורק כאשר $N < 2$.
נניח כי הוכחנו כבר שעבור $N < 2^K$ ניתן להעביר N כרטיסים לקופסה אחרת, כאשר משתמשים ב-K קופסאות ריקות בלבד. האם נוכיח שניתן להעביר $N < 2^{K+1}$ כרטיסים כאשר משתמשים ב-$K + 1$ קופסאות ריקות.

את התהליך ניתן להרכיב מהשלבים הבאים:

א. מעבירים כרטיס 1 לקופסה ריקה,
ב.מעבירים את הערמה של כרטיסים מ-2 עד 2^K לקופסה ריקה (לפי הנחת אינדוקציה).
ג. מניחים את 1 מעל 2.
ד. מעבירים את ערמה של כרטיסים עם המספרים גדולים מ-2 לקופסה אחר (בעזרת הנחת אינדוקציה)
ה. מעבירים את 1 לקופסה ריקה,
ו. מעבירים את הכרטיסים מ-2 עד 2^K להיות מעל הכרטיס $2^K + 1$ (בעזרת הנחת אינדוקציה.)
ז. מניחים את 1 מעל 2.

כעת נשאר להוכיח שאין אפשרות להעביר 2^{K+1} כרטיסים בעזרת $K + 1$ קופסאות ריקות, אם כבר הוכחנו שאי-אפשר להעביר 2^K כרטיסים בעזרת K קופסאות ריקות.
זאת אומרת שאם אנחנו מעבירים 2^K כרטיסים ומשתמשים ב-$K + 1$ קופסאות ריקות, אז יהיה רגע בו אנחנו מילאנו את כל ה-$K + 2$ קופסאות.
נניח שאפשר להעביר 2^{K+1} כרטיסים בעזרת $K + 1$ קופסאות ריקות ונגיע לסתירה.

במשחק שלנו כל המהלכים הפיכים: בכל מהלך אפשר לקחת כרטיס M ולהניח אותו או על כרטיס M+1, או בקופסה ריקה, אבל גם קודם הוא היה על כרטיס M או על קופסה ריקה. לכן בשביל להצליח במשימה, מספיק רק להזיז את הכרטיס עם המספר הגדול ביותר מהמקום (קודם צריך להוריד את הכול מעליו, ואחרי זה נוכל להחזיר את כל הכרטיסים שיהיו מעליו, בדיוק באותה צורה כמו שהורדנו אותם.

נתבונן בכרטיסים $2^K, 2^K + 1, \ldots, 2^{K+1} - 1$. לפני שנצליח להזיז אותם, הכרטיסים האלה יכסו את כל הקופסאות שיש. זאת אומר, שהכרטיסים $1, 2, \ldots, 2^K - 1$ יהיו מעל 2^K בערמה אחת. נתבונן בשני האפשרויות: כאשר במצב זה מתחתיהם יש עוד כרטיסים, והמקרה שלא.

א. נניח שעוד לפני שהעברנו את 2^{K+1}, יש קופסה בה נמצאת ערמת כרטיסים מ-1 עד M, כאשר $2^K < M < 2^{K+1}$. לפי הנחת האינדוקציה, מרגע זה אנחנו לא נוכל להעביר את הכרטיס 2^K (כי בשביל זה צריך לפחות ריקות, אבל לא נוכל לשים את 2^K או כרטיס עם מספר נמוך יותר מעל הקופסה בה נמצא 2^{K+1}, לכן בעצם לא נוכל להזיז את M אף פעם, ולא נוכל להשלים את המשימה).
ב. נניח שעוד לפני שהעברנו את 2^{K+1}, יש קופסה בה נמצאת ערמת כרטיסים מ-1 עד 2^K. אנחנו נקרא לכרטיסים מ-1 עד 2^K קטנים, ולכרטיסים האחרים גדולים. ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות, שאנחנו מתחילים את התהליך מיצירת ערמה של כל הכרטיסים הקטנים, כי את הכרטיסים הגדולים יהיה לא יותר קשה להעביר לכל מצב רצוי ברגע שהכרטיסים הקטנים תופסים כמה שיותר קופסאות, הרי לא ניתן להניח כרטיסים גדולים על כרטיסים קטנים. נשים לב, שמרגע שיצרנו את ערמת הכרטיסים הקטנים, לא נוכל להעביר את הכרטיס 2^K אלה רק במצב אחד: כאשר מעבירים אותו לכרטיס $2^K + 1$ וכל הכרטיסים הגדולים מתחתיו (זה נובע מהנחת האינדוקציה). לכן בקופסה זאת לא נוכל להניח כרטיסים גדולים עד שנעביר את כל הכרטיסים הגדולים לערמה אחרת (או נחליט להחזיר את הכול למצה ההתחלתי). לכן גם לא נוכל להזיז את 2^{K+1}, לפי הנחת האינדוקציה. מש"ל.

4. במרחב נמצאים $2n$ נקודות, אף 4 לא במישור אחד. זוגות מסוימים של נקודות חוברו על ידי n^2+1 קטעים.
א. הוכיחו כי נוצר משולש אחד לפחות.
ב. הוכיחו כי נוצרו לפחות n משולשים.

פתרון. זו בעצם שאלה על גרפים.
א. נוכיח טענה טיפה יותר כללית:

משפט טורן. בגרף בעל m קודקודים ללא משולשים, יש לכל היותר $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ צלעות.
המצב המקסימלי מתקבל בגרף דו-צדדי מלא (כלומר כאשר קודקודים מחולקים לשני מחלקות, ויש קשת בין שתי נקודות אך ורק אם הן במחלקות שונות), כאשר בכל צד כמות הנקודות קרובה ככל האפשר ל-$\frac{m}{2}$. זאת הדוגמה היחידה למצב מקסימאלי.

הערה. משפט טורן הוא בעצם יותר כללי: הוא אומר, מה הוא מקסימום של כמות הקשתות עבור גרף שלא מכיל **קליק** בגודל k (כאשר קליק זה תת-גרף בו כל זוגות הקודקודים מחוברים בקשתות). אנו נראה את ההוכחה עבור המקרה שניסחנו, $k = 2$. ניסוח והוכחה עבור המשפט הכללי די דומים ואני ממליץ לקוראים לפתח את זה לבד.

הוכחה. באינדוקציה. עבור $m = 1, 2$ זה קל – בכל מקרה אין משולשים.
ניקח שני קודקודים מחוברים. סכום הדרגות שלהם לא עולה על m, אחרת תמצא נקודה שלישית שיוצרת איתם משולש. לכן לאחד מהן הדרגה לא עולה על $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$.
אם נעיף את הקודקוד הזה, אנחנו יודעים שהכמות של קשתות שיישארו לא עולה על כמות הקשתות שיש לגרף דו-צדדי מאוזן (והמקסימום מתקבל רק בו), לפי הנחת האינדוקציה.
אם זה גרף דו-צדדי מאוזן, ומוסיפים קודקוד, אז ניתן לחבר אותו רק לקודקודים בצד אחד, לכן ניתן להוסיף בדיוק $\left\lceil \frac{m-1}{2} \right\rceil$ קשתות. אבל בכל מקרה אחר הורדנו אותה כמות של קשתות ונשארנו אם פחות קשתות, מאשר לגרף דו-צדדי מאוזן בעל $m-1$ קודקודים. מש"ל.

ב. אנחנו נשתמש באינדוקציה על n. עבור $n = 2$: יש 4 נקודות ו-5 קודקודים, לכן בעצם יש את כל הקשתות פרט לאחת, לכן צריך להתבונן בשלשות שלא מכילות את הזוג שבו חסרה קשת, ויש 2 כאלה.

נניח שעבור n הוכחנו את הטענה, וכרגע יש לנו גרף של $2n+2$ קודקודים, $(n+1)^2+1$ קשתות. כבר ראינו בסעיף א' שקיים משולש ABC, וצריך n משולשים נוספים. דרגות של A, B, C (כלומר כמות הקשתות שיוצאות מהם) יסומנו k_A, k_B, k_C בהתאמה.

אם $k_A + k_B + k_C \le 3n+4$, אז עבור שני קודקודים אחרים של המשולש (ללא הגבלת הכלליות A ו-B) $k_A + k_B \le 2n+2$, לכן אם נמחק את הנקודות A, B נצטרך להעיף לכל

היותר $2n+1$ קשתות (הרי AB נספר פעמיים בתוך k_A+k_B), ואז יישארו לפחות $(n+1)^2+1-(2n+1)=n^2+1$ קשתות, ולכן יש בגרף שנשאר n משולשים לפי הנחת האינדוקציה, וזה לא כולל את ABC (הרי כל הצלעות שלו נמחקו).

לכן נשאר לנו לטבל במקרה בו $k_A+k_B+k_C\geq 3n+5$. יהיו S_A,S_B,S_C קבוצות של נקודות חוץ שמחוברות ל-A,B,C בהתאמה מבין $2n-3$ נקודות השונות מ-A,B,C.
אז $k_A-2=|S_A|,\ k_B-2=|S_B|,\ k_C-2=|S_C|$, לכן $|S_A|+|S_B|+|S_C|\geq 3n-1$, ואז לפי נוסחת החלה הדחה

$$(2n+2)-3\geq|S_A\cup S_B\cup S_C|\geq|S_A|+|S_B|+|S_C|-\left(|S_A\cup S_B|+|S_A\cup S_C|+|S_B\cup S_C|\right)\geq$$
$$\geq 3n-1-\left(|S_A\cup S_B|+|S_A\cup S_C|+|S_B\cup S_C|\right)$$

.

מהעברת אגפים $|S_A\cup S_B|+|S_A\cup S_C|+|S_B\cup S_C|\geq n$.
נשים לב שכל איבר ב-$S_A\cup S_B$ נותן משולש שיש לו קודקודים A ו-B (אבל לא C), באופן דומה גם $S_A\cup S_C$ וגם $S_B\cup S_C$, וביחד זה נותן לפחות n משולשים שכולם שונים זה מזה ומ-C. מש"ל

5. תארו את כל הזוגות $\{k,\ell\}$ של מספרים שלמים חיוביים עבורם מתקיימת הטענה הבאה: לכל צביעה של המספרים הטבעיים בשני צבעים, כחול ולבן, אז או שיש שני מספרים כחולים שההפרש בינם k, או שיש שני מספרים לבנים שההפרש בינם ℓ.

תשובה. כל הזוגות עבורם $\text{ord}_2 k\neq\text{ord}_2\ell$, כאשר ב-$\text{ord}_2 n$ מסמנים את המספר m המקסימלי עבורו n מתחלק ב-2^m.

פתרון. מספיק לפתור את השאלה עבור k,ℓ זרים. אכן, אם שני המספרים מתחלקים ב-d, אז ניתן להתייחס לכל סדרה חשבונית בעלת הפרש d בנפרד, ואז עוברים לשאלה דומה עבור $k'=\frac{k}{d},\ \ell'=\frac{\ell}{d}$.

ברור שעבור k,ℓ ששניהם אי-זוגיים הטענה לא מתקיימת: מספיק לצבוע את המספרים הזוגיים בלבן ואת האי-זוגיים בכחול. לכן מספיק לבדוק את הטענה עבור המקרה בו k אי-זוגי, ו-ℓ זוגי. אנחנו נראה שבמקרה הטענה מתקיימת ולא קיימת צביעה.

נניח בשלילה שקיימת צביעה. בסדרה חשבונית $a,a+k,a+2k,...,a+\ell k$ כל שני מספרים עוקבים הם בצבעים הפוכים, לכן הקצוות $a,a+\ell k$ הם באותו צבע (הרי ℓ זוגי).
מצד שני גם בסדרה חשבונית $a,a+\ell,a+2\ell,...,a+k\ell$ כל שני מספרים עוקבים הם בצבעים הפוכים, לכן הקצוות $a,a+\ell k$ הם בצבעים הפוכים (הרי k אי-זוגי). סתירה.

6. על שולחן מלבני נמצאים מפיות ריבועיות באותו גודל ב-K צבעים שונים, שצלעותיהם מקבילות לקצוות השולחן. נתון, שאם לוקחים K מפיות שכולן בצבעים שונים, אז ניתן לתקוע מסמר שיפגע בשתי מפיות. הוכיחו, שיש צבע מסוים, שאת כל המפיות בצבע זה ניתן להצמיד לשולחן על ידי $2K - 2$ מסמרים.

פתרון. את הטענה מוכיחים באינדוקציה לפי K. הבסיס: $K = 2$. נתבונן בריבוע השמאלי ביותר, שנקרא לו Q.
אם הוא בצבע הראשון, אז כל ריבוע בצבע השני מכיל את אחד מהקודקודים הימניים שלו, לכן את כל הריבועים בצבע השני אפשר להצמיד לשולחן ע"י שני מסמרים בלבד.

צעד אינדוקציה: בהנחה שהוכחנו עבור K, נוכיח עבור $K + 1$ צבעים. שוב נבחר את הריבוע השמאלי ביותר ונקרא לו Q. נניח שהצבע שלו הוא $K + 1$. כל הריבועים שנחתכים איתו מכילים את אחד משני הקודקודים הימניים שלו, ואפשר להצמיד אותם לשולחן ע"י שני מסמרים בלבד. נוריד מהשולחן את כל המפיות בצבע $K + 1$ ואת כל המפיות שנחתכות עם Q. קל להראות, שאם נבחר כעת K ריבועים בצבעים שונים, אז שניים מהם נחתכים (הרי אחרת, מבין Q ועוד K ריבועים בצבעים $1, 2, \ldots, K$ אף שניים לא נחתכים, בניגוד לנתון).
לכן לפי הנחת האינדוקציה, אפשרי לבחור צבע שונה מ-$K + 1$ ולהצמיד את כל המפיות בצבע זה שלא הורדנו לשולחן על ידי $2K - 2$ מסמרים. אבל את המפיות בצבע זה שהורדנו, כלומר אלה שחותכות את Q, ניתן להצמיד לשולחן על ידי שני מסמרים נוספים.
מש"ל.