תרגיל 6

1. במעגל רשומים N מספרים שלמים. כל דקה מחליפים את כל המספרים בו-זמנית: מחליפים כל מספר בערך מוחלט של ההפרש בינו לבין השכן שלו נגד כיוון השעון.
א. הוכח כי עבור $N = 4$ לאחר זמן מה יישארו רק אפסים.
ב. האם זה נכון גם ל- $N = 3$?
ג. לאיזה ערכים של N ניתן לטעון שיישארו רק אפסים אחרי מספר סופי של מהלכים?

2. בתור נמצאים N אנשים, שלכל אחד מהם יש כרטיס. הכרטיסים ממוספרים מ-1 עד N אבל אף אחד לא עומד במקום שמתאים לכרטיס שלו. הסדרן יכול להחליף מקומות של שני אנשים עוקבים בתור, בתנאי שאף אחד מהם לא עומד במקום המיועד לו לפי הכרטיס. האם הוא תמיד יכול לגרום למצב שכולם יענדו לפי הסדר של הכרטיסים, לאחר מספר החלפות מסוג זה?

3. בקופסה נמצאים 1000 כרטיסים ממוספרים מ-1 עד 1000 (בסדר זה). בנוסף, יש K קופסאות ריקות. בכל מהלך מותר לקחת כרטיס אחד מלמעלה של קופסה מסוימת, ולהניח אותו בקופסה ריקה, או על הכרטיס שמספרו גדול ב-1. עבור איזה ערך K הקטן ביותר ניתן יהיה להעביר את כל הכרטיסים מהקופסה המקורית לקופסה אחרת?

4. במרחב נמצאים $2n$ נקודות, אף 4 לא במישור אחד. זוגות מסוימים של נקודות חוברו על ידי n^2+1 קטעים.
א. הוכיחו כי נוצר משולש אחד לפחות.
ב. הוכיחו כי נוצרו לפחות n משולשים.

5. תארו את כל הזוגות $\{k,\ell\}$ של מספרים שלמים חיוביים עבורם מתקיימת הטענה הבאה: לכל צביעה של המספרים הטבעיים בשני צבעים, כחול ולבן, אז או שיש שני מספרים כחולים שההפרש בינם k, או שיש שני מספרים לבנים שההפרש בינם ℓ.

6. על שולחן מלבני נמצאים מפיות ריבועיות באותו גודל ב-K צבעים שונים, שצלעותיהם מקבילות לקצוות השולחן. נתון, שאם לוקחים K מפיות שכולן בצבעים שונים, אז ניתן לתקוע מסמר שיפגע בשתי מפיות. הוכיחו, שיש צבע מסוים, שאת כל המפיות בצבע זה ניתן להצמיד לשולחן על ידי $2K-2$ מסמרים.