<u>תרגיל 5</u>

סריגים, נוסחת פיק

בתרגיל זה כאשר אומרים "נקודה שלמה" מתכוונים לנקודה ששתי הקואורדינאטות שלה הם מספרים שלמים.

1. נתון משולש ABC בעל קודקודים שלמים, שעל צלעותיו אין נקודות שלמות, ובתוכו יש נקודה שלמה אחת בלבד M. הוכיחו כי M היא נקודת מפגש התיכונים של ABC.

פתרון. משולשים ABM, CBM, ACM הם בעלי קודקודים שלמים וריקים מנקודות שלמות, לכן לכולם שטח $\frac{1}{2}$. לכן הם שווי שטח. למשולשים ABM, ACM השטח שווה ובסיס משותף AM, לכן גם הגבהים שווים, ולכן המרחקים מ-B ומ-C לישר AM שווים. B, C נמצאים בצדדים שונים של AM, אבל באותו מרחק, לכן AM חוצה את BC. לכן AM הוא תיכון של משולש ABC. באופן דומה גם BM, CM הם תיכונים של משולש ABC, מש"ל.

2. א. הוכיחו: כל צורה במישור בעלת שטח קטן מ-1, ניתן להזיז כך שהצורה המוזזת לא תכיל אף נקודה שלמה.
ב. הוכיחו: כל צורה במישור בעלת שטח גדול מ-1, ניתן להזיז כך שהצורה המוזזת תכיל שתי נקודות שלמות.

פתרון. נניח שהמישור עשוי זכוכית שקופה, ונחתוך את המישור למשבצות יחידה, כאשר על כל משבצת שנחתכת אם הצורה החיתוך מסומן בשחור. כעת נזיז את כל המשבצות לאותה משבצת $[0,1]\times[0,1]$
א. קיימת נקודה לא מכוסה (x,y) (כי השטח השחור קטן מ-1), והזזה של הצורה בווקטור $(-x,-y)$ תגרום לה לא להיחתך אם הסריג של נקודות שלמות.
ב. קיימת נקודה מכוסה פעמיים (x,y) (כי השטח השחור גדול מ-1, לכן חלק משטח המשבצת $[0,1]\times[0,1]$ מכוסה פעמיים), והזזה של הצורה בווקטור $(-x,-y)$ תגרום לה לא להיחתך אם הסריג של נקודות שלמות פעמיים לפחות.

3. במישור נתון ריבוע $n\times n$, שקודקודיו לא בהכרח נקודות שלמות וצלעותיו לא בהכרח מקבילים לצירים. הוכיחו שקיבוע זה מכסה לכל היותר $(n+1)^2$ נקודות שלמות.

הערה. אם צלעותיו מקבילים לצירים, וקודקודיו שלמים, אז יש בדיוק $(n+1)^2$ נקודות שלמות.

פתרון. את הריבוע נסמן Q. תהיה S קבוצת כל הנקודות השלמות המוכלות ב-Q. יהי P הקמור של S. קל לראות ש-P הוא מצולע קמור שמוכל ב-Q.

טענה. אם מצולע קמור P מוכל במצולע קמור Q, אז היקף P קטן או שווה להיקף Q (השוויון מתקיים כאשר המצולעים מתלכדים).

מהטענה נובע, כי היקף Q הוא לכל היותר $4n$. לכן יש לכל היותר $4n$ נקודות שלמות על Q. אכן, לא יתכן שיש שני נקודות שלמות במרחק פחות מ-1, לכן לא יתכן שיש יותר מאשר $4n$ נקודות שלמות על היקף Q. בניגוד ל-P (שקודקודיו לא בהכרח שלמים) Q הוא מצולע שאת שטחו ניתן לחשב על ידי נוסחת פיק: $S_{\mathrm{Q}} = i + \frac{b}{2} - 1$, כאשר b זה כמות הנקודות על היקף Q, ובנוסף $S_{\mathrm{Q}} \le S_{\mathrm{P}} = n^2$ ולכן יהיה $m = i + b$ מספר הנקודות שמכוסות על ידי הריבוע. אזי $m - \frac{b}{2} - 1 = i + \frac{b}{2} - 1 \le n^2$ לכן $m \le n^2 + 1 + \frac{b}{2} \le n^2 + 1 + \frac{4n}{2} \le (n+1)^2$.
מש"ל.

4. בנקודה $(0,0)$ נמצא צייד נקודתי. בכל נקודות שלמות אחרת נמצא עץ עגול שרדיוסו R. הוכח שהצייד לא רואה ארנבת נקודתית שנמצאת במרחק $\frac{1}{R}$ או יותר ממנו.

פתרון. נסמן ב-A את מיקום הארנבת, וב-Z את מיקום הצייד. בכל נקודה של קטע AZ נעביר קטעים מאונכים ל-AZ באורך $\frac{1}{R}$ בשני הכיוונים. קטעים אלה מכסים מלבן M שצלעותיו $R, \frac{2}{R} < \mathrm{AZ}$ לכן שטחו 2. מספיק להוכיח שמלבן זה מכיל נקודה שלמה נוספת בנוסף ל-Z, כי אז הנקודה הזאת היא מרכז של עץ שמסתיר את הארנבת.
אם נסובב את מלבן M ב-180° מסביב ל-O נקבל מלבן W. מלבן W מכיל נקודה שלמה חוץ מ-Z אם ורק אם מלבן M מכיל נקודה שלמה חוץ מ-Z. לכן מספיק להוכיח שמלבן $\mathrm{U} = \mathrm{M} \cup \mathrm{W}$ ששטחו 4 מכיל נקודות שלמות חוץ מ-Z.
זה נובע ישירות מטענה מפורסמת:

הלמה של מינקובסקי. צורה K קמורה סימטרית ביחס לראשית ששטחה גדול מ-4 מכילה נקודות שלמות נוספות חוץ מראשית.

הערה. אם שטח הצורה שווה ל-4 בדיוק, אז יתכן שאין נקודות שלמות חוץ מהראשית בצורה, למשל הריבוע הפתוח $(-1,1)\times(-1,1)$. אבל אם הצורה סגורה ושטחה 4, אז הלמה של מינקובסקי עדיין עובדת, הרי כל ε סביבה של הצורה מכילה נקודה שלמה נוספת.
כמובן, למה של מינקובסקי קיימת לא רק במישור אלה גם במרחבים ממימד גבוה יותר.

הוכחת הלמה. נגדיר $\mathrm{L} = \mathrm{K}/2 = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \middle| 2v \in \mathrm{K} \right\}$. אז L זו קבוצה קמורה ששטחה גדול מ-1, לכן כמו שראינו בשאלה 2, ניתן להזיז את L, אפילו בלי לסובב, כך ששני נקודות של L יהפכו לנקודות שלמות. לכן יש $a, b \in \mathrm{L}$ עבורם $a - b \ne (0,0)$ שלם. אבל L, בדומה ל-K, סימטרית ביחס לראשית ולכן $-b \in \mathrm{L}$. לכן $a = \frac{u}{2}, -b = \frac{v}{2}$ כאשר $u, v \in \mathrm{K}$, ולכן $\frac{u+v}{2} = a - b \in \mathbb{Z}^2$. אבל K קמור, לכן $\frac{u+v}{2} \in \mathrm{K}$. מש"ל.

5. צריח צולע, שעושה מהלכים למשבצת סמוכה במאונך או במאונן, ב-64 מהלכים עבר על כל המשבצות של לוח שח 8×8 וחזר למשבצת התחלתית.
הוכיחו שכמות המהלכים האופקיים שונה מכמות המהלכים האנכיים.

פתרון. קודם כל נוכיח שכל קו ישר אנכי שמפריד בין משבצות הלוח אבל לא חותך חלק פנימי של אף משבצת נחתך אותו מספר פעמים ע"י מהלכי צריח בשורות הזוגיות ובשורות האי-זוגיות.
נתבונן באותו חלק ממסלול הצריח שנמצא מימין לקו אנכי נתון. חלק זה מורכב ממספר מסלולים לא סגורים, שמתחילים ומסתיימים בקו האופקי. הם מתחלקים ל-3 סוגים:

א. מסלולים שמתחילים ומסתיימים במשבצת שחורה
ב. מסלולים שמתחילים ומסתיימים במשבצות בצבעים שונים
ג. מסלולים שמתחילים ומסתיימים במשבצת לבנה

סה"כ במסלולים מסוג ב' יש אותה כמות של משבצות שחורות ולבנות, במסלולים מסוג א' כמות של משבצות לבנות גדולה ב-1, ובמסלולים מסוג ב' כמות של משבצות שחורות גדולה ב-1. סה"כ כמות המשבצות השחורות בצד הימני של הלוח זהה לכמות המשבצות הלבנות, לכן כמות המסלולים מסוג א' שווה לכמות המסלולים מסוג ג'.
כל משבצת בתחילה או בסוף של מסלול כזה מתאימה למהלך אופקי של צריח שחוצה את הקו האופקי הנתון. מהלכים בשורות הזוגיות מתאימים למשבצות קצה בצבע אחד, ומהלכים בשורות הזוגיות מתאימות למשבצות קצה בצבע אחר, אבל היות ויש אותה כמות של מסלולים מסוג א' ומסוג ג', אז יש אותה כמות של משבצות קצה בכל צבע, לכן יש אותה כמות של מהלכים אופקיים שחוצים את הקו הנתון בשורות הזוגיות והאי-זוגיות.

נניח שאורך הצלע של משבצת היא 1, ונכניס מערכת צירים, כך מרכזי המשבצות יהיו נקודות שלמות. נניח שהצריח תמיד נע על קווים ישרים בין נקודות שלמות. מסלול של צריח הוא מצולע, שעל הגבול שלו 64 נקודות שלמות ובתוכו אין נקודות שלמות. לכן השטח של המצולע, לפי נוסחת פיק, שווה 31.

אפשר לחשב את השטח גם בדרך אחרת. אם נחתוך את המצולע ע"י קווים אנכיים העוברים דרך מרכזי המשבצות, אז המצולע יתפצל למלבנים בעובי 1, שהגבולות שלהם מלמעלה ומלמטה הן המהלכים האופקיים של הצריח. שטח שווה לסכום עם סימנים של גבהים של מהלכים האופקיים של הצריח. לכן כאשר מסתכלים על כל זה מודולו 2, בהתחשב שהשטח של הצורה הוא אי-זוגי, יוצא שיש מספר אי-זוגו של מהלכי צריח אופקיים בשורות האי-זוגיות.
אבל הוכחנו בהתחלה שיש את אותו המספר של מהלכי צריח אופקיים בשורות הזוגיות. לכן המספר הכולל של מהלכי צריח הוא פי 2 גדול ממספר אי-זוגי, כלומר מספר מסוג 4K+2. לכן זה לא 32. מש"ל.

6*. הוכיחו כי לכל N טבעי, קיים מעגל שנמצאים עליו בדיוק N נקודות שלמות.

פתרון. במהלך הפתרון אנחנו נקרא למספרים $\{a+bi\in\mathbb{C}|a,b\in\mathbb{Z}\}$ מספרים גאוסיים, ונסמן את הקבוצה הזאת $\mathbb{Z}[i]$. מספרים אלה יוצרים חוג (יש חיבור, חיסור וכפל) ויש בו חלוקה עם שארית ולכן גם פירוק יחיד לגורמים אי-פריקים – כל שני פירוקים של אותו

מספר לגורמים אי-פריקים נבדלים רק בסדר הגורמים ובכפל ביחידות (מספרים הפיכים כפלית), כאשר היחידות במספרים גאוסיים הן $\{\pm 1, \pm i\}$.

תחילה נתבונן במעגל שמרכזו 0 ורדיוסו $\sqrt{5^n}$. כל נקודה שלמה שלו ניתן ליצג על ידי מספר מרוכב גאוסי $a+bi$, כאשר $(a+bi)\cdot(a-bi) = 5^n = (2+i)^n \cdot (2-i)^n$.

המספרים $2+i, 2-i$ הם מספרים גאוסיים אי-פריקים לא שקולים. אם $|a+bi| = \sqrt{5^n}$, אז $a+bi = i^\ell \cdot (2+i)^k \cdot (2-i)^{n-k}$, כאשר $\ell = 0,1,2,3$, $k = 0,\ldots,n$. כלומר סה"כ על מעגל הזה יש בדיוק $4\cdot(n+1)$ נקודות שלמות.

בצורה כזאת פתרנו את השאלה אם N מתחלק ב-4.

נסתכל כרע על נקודות המעגל הזה מודולו 2. אז $a+bi = i^\ell \cdot i^k \cdot i^{n-k} = i^{\ell+k} \pmod 2$. כלומר מחצית השלמות שוות i מודולו 2, ומחצית שוות 1 מודולו 2, בהתאם לזוגיות של ℓ. לכן על הסריג $1+2a+2bi$ נמצאים $2\cdot(n+1)$ נקודות של מעגל שמרכזו 0 ורדיוסו $\sqrt{5^n}$.

לכן על הסריג שמרכזו $-\frac{1}{2}$ ורדיוסו $\sqrt{5^n}/2$. יש בדיוק $2\cdot(n+1)$.

בצורה כזאת פתרנו את השאלה לכל N זוגי.

כעת נסתכל על נקודות של המעגל הראשון שיצרנו מודולו 3.

$$a+bi = i^\ell \cdot (2+i)^k \cdot (2-i)^{n-k} = i^\ell \cdot (-1+i)^k \cdot (-1-i)^{n-k} = i^\ell \cdot i^k (1+i)^k \cdot i^{2(n-k)} (1+i)^{n-k} =$$
$$= i^s \cdot (1+i)^n \pmod 3$$

קל לראות כי $(1+i)^2 = 2i = -i \pmod 3$, לכן $(1+i)^{2k} = i^t \pmod 3$, אבל $(1+i)^{2k+1} = i^t \cdot (1+i)$. לכן עבור $n = 2k$ נקבל לכל נקודה שלמה על המעגל $a+bi = i^r$. מבין ארבע נקודות $i^\ell \cdot (a+bi) = i^{r+\ell}$, רק אחד מהם הוא $= 1 \pmod 3$.

לכן על השריג $1+3a+3bi$ יש בדיוק $n+1$ נקודות של מעגל שמרכזו 0 ורדיוסו $\sqrt{5^n}$.

לכן מעגל שמרכזו $-\frac{1}{3}$ ורדיוסו $\frac{\sqrt{5^n}}{3}$ יכיל בדיוק $n+1 = 2k+1$ נקודות שלמות.

בצורה כזאת פתרנו את השאלה גם ל-N אי-זוגי.

הערה. שאלה מתבקשת (מבחינת אלה שלא מכירים חוגים חוץ מהמספרים בשלמים) היא האם ניתן לדבר בכלל על $\mathbb{Z}[i]/3$ ואיך זה נראה ומתי בכלל אפשר לקחת מודולו.

מסתבר שניתן להגדיר מנה של חוג מודולו כל תת-קבוצה שנקראת אידיאל.

אידיאל I בחוג K (סימון המקובל הוא $I \lhd K$) זה תת-קבוצה שהיא תת-חבורה בחבורה החיבורית, וסגורה תחת כפל באופן חזק, כלומר אם $x \in I,\ y \in K$ אז $xy \in I$.

הטענה היא ש-$I \lhd K$, אז מותר להגדיר K/I. מצד שני $\{3a+3b\cdot i\} \lhd \mathbb{Z}[i]$.