<u>תרגיל 5</u>

סריגים, נוסחת פיק

בתרגיל זה כאשר אומרים "נקודה שלמה" מתכוונים לנקודה ששתי הקואורדינאטות שלה הם מספרים שלמים.

1. נתון משולש ABC בעל קודקודים שלמים, שעל צלעותיו אין נקודות שלמות, ובתוכו יש נקודה שלמה אחת בלבד M. הוכיחו כי M היא נקודת מפגש התיכונים של ABC.

2. א. הוכיחו: כל צורה במישור בעלת שטח קטן מ-1, ניתן להזיז כך שהצורה המוזזת לא תכיל אף נקודה שלמה.
ב. הוכיחו: כל צורה במישור בעלת שטח גדול מ-1, ניתן להזיז כך שהצורה המוזזת תכיל שתי נקודות שלמות.

3. במישור נתון ריבוע $n\times n$, שקודקודיו לא בהכרח נקודות שלמות וצלעותיו לא בהכרח מקבילים לצירים. הוכיחו שקיבוע זה מכסה לכל היותר $(n+1)^2$ נקודות שלמות.

4. בנקודה $(0,0)$ נמצא צייד נקודתי. בכל נקודות שלמות אחרת נמצא עץ עגול שרדיוסו R. הוכח שהצייד לא רואה ארנבת נקודתית שנמצאת במרחק $\frac{1}{R}$ או יותר ממנו.

5. צריח צולע, שעושה מהלכים למשבצת סמוכה במאונך או במאוזן, ב-64 מהלכים עבר על כל המשבצות של לוח שח 8×8 וחזר למשבצת התחלתית.
הוכיחו שכמות המהלכים האופקיים שונה מכמות המהלכים האנכיים.

6*. הוכיחו כי לכל N טבעי, קיים מעגל שנמצאים עליו בדיוק N נקודות שלמות.