תרגיל 4

1. הוכיחו: אם $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ סדרה חשבונית אז $\frac{1}{a_0a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n}{a_0a_n}$.

פתרון. $\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}=\frac{a_{i+1}-a_i}{a_ia_{i+1}}=\frac{d}{a_ia_{i+1}}$ (כאשר d זה הפרש הסדרה), ולכן

$$\frac{d}{a_0a_1}+\frac{d}{a_1a_2}+...+\frac{d}{a_{n-1}a_n}=$$

$$=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_0}{a_0a_n}=\frac{nd}{a_0a_n}$$

נשאר לחלק את שני האגפים ב- d.

2. א. הוכיחו כי

$$\frac{a_1}{a_2\left(a_1+a_2\right)}+\frac{a_2}{a_3\left(a_2+a_3\right)}+...+\frac{a_n}{a_1\left(a_n+a_1\right)}=\frac{a_2}{a_1\left(a_1+a_2\right)}+\frac{a_3}{a_2\left(a_2+a_3\right)}+...+\frac{a_1}{a_n\left(a_n+a_1\right)}$$

ב. הוכיחו כי עם $abc=1$, אז $\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1$.

הערה. לפעמים נוח לרשום דברים ברישום של סכום ציקלי: למשל

א. $\sum_{cyc}\frac{a_1}{a_2\left(a_1+a_2\right)}=\sum_{cyc}\frac{a_2}{a_1\left(a_1+a_2\right)}$.

ב. $\sum_{cyc}\frac{1}{1+a+ab}=1$.

פירוש הסימון: ביחד אם הביטוי שרשמתי, אני מסכם את כל הביטויים שאפשר לקבל ממנו בהזזה מעגלית $a\to b\to c\to a$ כל מספר של פעמים.
סימון זה חוסך ברישום של ביטוים סימטריים, והוא לפעמים נוח וחוסך בזמן הפתרון (שזה יכול להיות חשוב באולימפיאדה כאשר יש לחץ זמן).

פתרון. א. נעביר הכול לאותו צד $\sum_{cyc}\frac{\frac{a_1}{a_2}-\frac{a_2}{a_1}}{a_1+a_2}=0$, וזה $\sum_{cyc}\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1a_2\left(a_1+a_2\right)}=0$, כלומר

$\sum_{cyc}\frac{a_1-a_2}{a_1a_2}=0$ או $\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)=0$, וזה ברור.

ב. נשים לב כי $\frac{1}{1+b+bc}=\frac{a}{a+ab+abc}=\frac{a}{a+ab+1}$. באופן דומה:

$\frac{1}{1+c+ca}=\frac{b}{b+bc+cab}=\frac{b}{b+bc+1}=\frac{ab}{ab+abc+a}=\frac{ab}{ab+1+a}$. לכן יש מחנה משותף:

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=\frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{1+a+ab}+\frac{ab}{1+a+ab}=\frac{1+a+ab}{1+a+ab}=1$$

מש"ל.

3. חשבו את $x+y$, בהינתן $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1$.

תשובה. 0.

פתרון. נשים לב כי $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=x^2+1-x^2=1$. לכן אם ניקח $y=-x$ נקבל שהתנאי מתקיים, ובמקרה זה $x+y=0$.

נשים לב גם, שעבור $x\geq 0$ הפונקציה $x+\sqrt{1+x^2}$ עולה ומקבלת כל ערך בתחום $[1,\infty)$ פעם אחד בדיוק. בו-זמנית גם $\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ מקבלת כל ערך בתחום $(0,1]$ פעם אחד בדיוק, לכן עבור $x<0$ הפונקציה $x+\sqrt{1+x^2}$ מקבלת כל ערך בתחום $(0,1]$ פעם אחד בדיוק. לכן לכל x יש y יחיד שמקיים $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1$, ומצאנו שהערך $y=-x$ מתאים, לכן $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\Leftrightarrow x+y=0$.

4. מסתבר שקיים S בעל התכונה: לכל ארבעה מספרים a,b,c,d ששונים מ-0 ומ-1 אם $a+b+c+d=S$ וגם $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=S$, אז גם $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-d}=S$.
מצא את S.

תשובה. 2.

פתרון. התנאים שמתקיימים עבור הרביעייה a,b,c,d מתקיימים גם עבור $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},\frac{1}{d}$ ולכן גם $\frac{1}{1-\frac{1}{a}}+\frac{1}{1-\frac{1}{b}}+\frac{1}{1-\frac{1}{c}}+\frac{1}{1-\frac{1}{d}}=S$, כלומר $\frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-1}+\frac{c}{c-1}+\frac{d}{d-1}=S$.

נחבר את המשוואה האחרונה עם המשוואה $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-d}=S$, ונקבל.

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-d}+\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}+\frac{d}{1-d}=2S.$$

אבל $\frac{1}{1-a}+\frac{a}{a-1}=-\frac{1}{a-1}+\frac{a}{a-1}=\frac{a-1}{a-1}=1$, באופן דומה עברו b,c,d לכן $2S=4$.

הערה. לא מבקשים בשאלה לבדוק כי 2 מתאים, אבל אני משוכנע שעשיתם את זה (או לפחות ניסיתם). נוח לעשות את זה באמצעות פולינומי וייטא

$$\sigma_1=a+b+c+d=\sum_{sym}a$$
$$\sigma_2=\sum_{sym}ab$$
$$\sigma_3=\sum_{sym}abc$$
$$\sigma_4=abcd$$

(סכום סימטרי או $\sum_{sym}$ זה סכום על כל הגרסאות הסימטריות של הביטוי).

אז אחרי מחנה משותף\פתיחת סוגריים: נתון כי $\sigma_1=\frac{\sigma_3}{\sigma_4}=2$, וצריך להוכיח כי

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-d}=\frac{4-3\sigma_1+2\sigma_2-\sigma_3}{1-\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3+\sigma_4}=2.$$

לפי נתון, מותר להחליף את σ_3 ב-$2\sigma_4$ ואת σ_1 ב-2, ונקבל

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-d}=\frac{4-3\sigma_1+2\sigma_2-\sigma_3}{1-\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3+\sigma_4}=\frac{4-6+2\sigma_2-2\sigma_4}{1-2+\sigma_2-2\sigma_4+\sigma_4}=$$
$$=\frac{-2+2\sigma_2-2\sigma_4}{-1+\sigma_2-\sigma_4}=2$$

5. א. הוכיחו כי $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

פתרון. א. צ"ל: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

אם נכפיל את האגף הימני ב- $\sqrt[3]{9}\left(1+\sqrt[3]{2}\right)$ נקבל

$$\left(1+\sqrt[3]{2}\right)\left(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)=1+2=3=\sqrt[3]{27}.$$

לכן $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}+1}$.

ובכן, צריך להוכיח כי $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}+1}$.

נעלה בשלישית ונקבל $\sqrt[3]{2}-1=\frac{3}{2+3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1}$,

במילים אחרות $\sqrt[3]{2}-1=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$.

נכפיל במחנה ונפתח סוגריים, וזה יסיים את ההוכחה.

ב. הוכיחו כי

$$\sqrt[3]{m^3+6m^2n+3mn^2-n^3-3\left(m^2+mn+n^2\right)\sqrt[3]{(m+n)mn}}=$$
$$=\sqrt[3]{m^2(m+n)}-\sqrt[3]{mn^2}-\sqrt[3]{(m+n)^2n}.$$

הוכחה. נסמן: $p=-m-n$ (או המספר עבורו $m+n+p=0$). נשים לב כי

$$m^2n+n^2p+p^2m=m^2n-n^2\cdot(m+n)+m\cdot\left(m^2+2mn+n^2\right)=m^3+3m^2n-n^3$$

לכן הזהות תהפוך ל:

$\sqrt[3]{n^2p+m^2n+p^2m-3mnp-3(mn+np+mp)\cdot\sqrt[3]{mnp}}=-\sqrt[3]{m^2p}-\sqrt[3]{n^2m}-\sqrt[3]{p^2n}$

נעלה בשלישית (נזכיר כי $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3\sum_{sym}a^2b+6abc$, זה ישמש לפתיחת סוגריים באגף הימני).

$$n^2p+m^2n+p^2m-3mnp-3(mn+np+mp)\cdot\sqrt[3]{mnp}=$$
$$=-\sum_{cyc}m^2p-6mpn-3\sum_{cyc}\sqrt[3]{p^5m^2n^2}-3\sum_{cyc}\sqrt[3]{n^4m^4p}=$$
$$=-\sum_{cyc}m^2p-6mpn-3(mnp)^{\frac{2}{3}}\sum_{cyc}p-3\sqrt[3]{mnp}\sum_{cyc}mn$$

המספר $\sum_{cyc}p=m+n+p$ מתאפס לפי הגדרת p. לכן הזהות שצריך להוכיח לאחר צמצום היא $n^2p+m^2n+p^2m=-\sum_{cyc}m^2p-3mpn$. אם נעביר את הכול שמאלה, נקבל $\sum_{sym}m^2p+3mpn=0$. זה שקול ל- $(m+n+p)(mn+np+pm)=0$ וזה ברור.

הערה. אם נציב $m=n=1$ בזהות ב', נקבל $\sqrt[3]{9-9\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{4}$, וזה שקול לזהות א'.