תרגיל 4

1. הוכיחו: אם $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ סדרה חשבונית אז $\frac{1}{a_0 a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + ... + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n}{a_0 a_n}$.

2. א. הוכיחו כי

$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)} + \frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)} + ... + \frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)} = \frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)} + \frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)} + ... + \frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}$$

ב. הוכיחו כי עם $abc=1$, אז $\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = 1$.

3. חשבו את $x+y$, בהינתן $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1$.

4. מסתבר שקיים S בעל התכונה: לכל ארבעה מספרים a,b,c,d ששונים מ-0 ומ-1 אם $a+b+c+d=S$ וגם $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=S$, אז גם $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-d}=S$.
מצא את S.

5. א. הוכיחו כי $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

ב. הוכיחו כי

$$\sqrt[3]{m^3+6m^2n+3mn^2-n^3-3\left(m^2+mn+n^2\right)\sqrt[3]{(m+n)mn}} =$$
$$= \sqrt[3]{m^2(m+n)} - \sqrt[3]{mn^2} - \sqrt[3]{(m+n)^2 n}$$
.