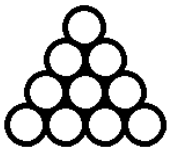
תרגיל 3



1. מספר משולש הוא מספר מסוג $1+2+...+n$ (הדוגמאות הראשונות הן 1, 3, 6, 10, ...).
מה יכולה להיות הספרה האחרונה (הימנית, ברישום עשרוני) של מספר משולש?

תשובה. 0, 1, 3, 5, 6, 8.
פתרון ראשון. נרשום את הספרה אחרונה של מספר המשולש (נתחיל מ-0, כל פעם נוסיף מספר חדש א רק ספרה אחרונה) ונקבל:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	6	0	5	1	8	6	5	5	6	8	1	5	0	6	3	1	0

אחרי 20 מהלכים מקבלים סדרה מחזורית, לכן אין טעם להמשיך לבדוק.

פתרון שני. לפי משפט שאריות הסיני, כדי להבין מה קורה מודולו 10 מספיק להבין מה קורה מודולו 2 ומה קורה מודולו 5. אנחנו מדברים על מספרים מסוג $\frac{n(n+1)}{2}$. זה יכול להיות גם מספר זוגי וגם מספר אי-זוגי (תלוי בשארית של n מודולו 4).
נבדוק מודולו 5: אם $n=0,-1\pmod 5$ אז $\frac{n(n+1)}{2}=0\pmod 5$, אם $n=1,-2\pmod 5$ נקבל $\frac{1\cdot 2}{2}=\frac{(-1)\cdot(-2)}{2}=1\pmod 5$, נשאר לבדוק $n=2\pmod 5$ ואז $\frac{2\cdot 3}{2}=3\pmod 5$.
ובכן, מודולו 5 יש שלוש אפשרויות: 0, 1, 3 ומודולו יש את שתי האפשרויות: 0, 1, לכן מודולו 10 יש 6 אפשרויות: 0, 1, 3, 5, 6, 8.

2. א. הוכח\י כי אם T מספר משולש, אז $25T+3$ וגם $49T+6$ הם מספרי משולש.
ב. הכלל\י את סעיף א'.
ג. הוכח\י כי בבסיס ספירה 9 המספר 111...111 (באורך כלשהו) הוא משולש.

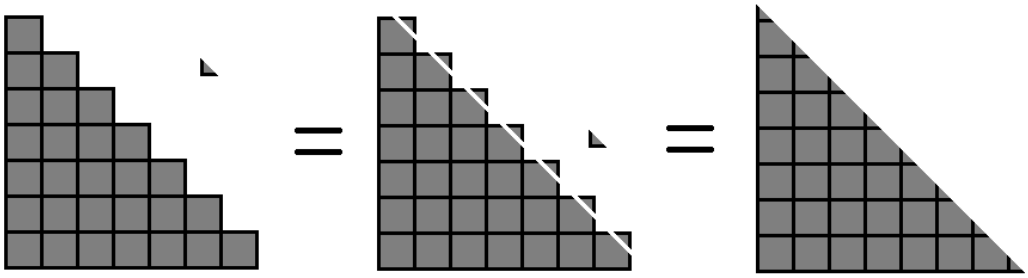
בשביל קיצור, נסמן את מספר המשולש של n ע"י $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

פתרון. א. נציג שני פתרונות: פתרון אלגברי ופתרון גיאומטרי.
פתרון אלגברי:

$$25\cdot T_n+3=25\cdot\frac{n(n+1)}{2}+3=\frac{5n(5n+5)+6}{2}=\frac{(5n+2)(5n+3)}{2}=T_{5n+2}.$$

$$49\cdot T_n+6=49\cdot\frac{n(n+1)}{2}+6=\frac{7n(7n+7)+12}{2}=\frac{(7n+3)(7n+4)}{2}=T_{7n+3}.$$

בשביל הפתרון הגיאומטרי, הקוראים מוזמנים לבהות בתמונה בעמוד הבא:



ב. הנוסחא היותר כללית שרואים אותה מהציור, וגם ניתן לנחש אותה כאשר מנסים להכליל את הנוסחאות, היא $(2k+1)^2 \cdot T_n + T_k = T_{(2k+1)n+2}$.

ההוכחה דומה לסעיף א'.

ג. מקרה פרטי אפילו יותר פשוט מסעיף א': $9T_n + 1$ הוא מספר המשולש.

אם משתמש בנוסחא זאת בבסיס 9, נראה באינדוקציה ש-$111\ldots111_9$ הוא מספר המשולש.

3. מספר מושלם הוא מספר ששווה לסכום כל המחלקים שלו (חוץ מעצמו). למשל: $6 = 1+2+3$, $28 = 1+2+4+7+14$.

א. הוכח\י כי אם $2^n - 1$ ראשוני, אז $2^{n-1}\left(2^n - 1\right)$ הוא מספר מושלם.

ב**. הוכח\י כי כל מספר מושלם זוגי הוא מסוג $2^{n-1}\left(2^n - 1\right)$, כאשר $2^n - 1$ ראשוני.

פתרון. א. נסמן: $2^n - 1 = p$. אז כל מחלק של $m = 2^{n-1} p$ הוא 2^k או $2^k p$. נוסיף את m עצמו לרשימת המחלקים (שיהיה יותר קל לחבר) ונקבל $1+2+\ldots+2^{n-1} + p \cdot \left(1+2+\ldots+2^{n-1}\right) = (1+p)\left(2^n - 1\right) = 2^n p = 2m$.

לכן סכום של כל המחלקים חוץ מ-m עצמו הוא m, ולכן m מושלם.

ב. נסמן ב-$\sigma(m)$ את הסכום של כל המחלקים של m, כולל m עצמו. מספר מושלם הוא כזה ש-$\sigma(m) = 2m$. עבור מספרים זרים q, r מתקיים $\sigma(q \cdot r) = \sigma(q) \cdot \sigma(r)$ (תרגיל לקורא).

נגיד כי $m = 2^n \cdot s$, כאשר s אי-זוגי.

אז $\sigma(m) = \sigma\left(2^n\right) \cdot \sigma(s) = \left(1+2+\ldots+2^n\right) \cdot \sigma(s) = \left(2^{n+1} - 1\right) \cdot \sigma(s)$.

כלומר $\left(2^{n+1} - 1\right) \cdot \sigma(s) = 2m = 2^{n+1} s$.

לכן $\left(2^{n+1} - 1\right) \cdot (s+t) = 2^{n+1} s$, כאשר t זה סכום כל המחלקים של s חוץ מ-s עצמו.

$$\left(2^{n+1} - 1\right) s + \left(2^{n+1} - 1\right) \cdot t = 2^{n+1} s.$$

נעביר את כל המחוברים שמכיל s ימינה: $\left(2^{n+1} - 1\right) \cdot t = s$.

ובכן, t, סכום המחלקים של s (חוץ מעצמו) הוא מחלק של s.

זה לא יתכן, כי סכום המחלקים של s גדול מכל המחלקים שלו, אלה אם כן בסכום זה יש מחובר אחד בלבד, וזה קורה רק כאשר s ראשוני, ויש לו מחלק יחיד חוץ מעצמו ואז $t = 1$, $s = 2^{n+1} - 1$ וראשוני. מש"ל.

הערה. השתמשנו בכך, ש-$2^{n+1} - 1 > 1$, כלומר הוכחה זו לא תעבוד עבור $n = 0$. לכן עדיין לא פסלנו אפשרות שקיימים מספרים מושלמים אי-זוגיים. זו עדיין שאלה פתוחה (לא נמצאות מספרים מושלמים אי-זוגיים ולא הוכח אי-קיום).

ממה שהוכחנו נובע, שכל מספר זוגי מושלם הוא מספר משולשי.

4. מצא את כל האפשרויות עבור ספרה אחרונה (הימנית) של מספר מושלם זוגי.

תשובה. 6 או 8.

פתרון. בשאלה הקודמת תיארנו את כל המספרים המשולמים הזוגיים: $m=2^{n-1}\cdot\left(2^n-1\right)$, כאשר $p=2^n-1$ ראשוני.
ננסה להבין כמה דברים לגבי מספרים ראשוניים מסוג $p=2^n-1$ (מספרים כאלה נקראים מספרי מרסן).
קיימת נוסחה: $a^k-b^k=\left(a-b\right)\left(a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+...+b^{k-1}\right)$. מכאן, שאם $n=s\cdot t$, אז 2^n-1 מתחלק ב-2^s-1 ולכן גם הוא פריק. לכן אם $p=2^n-1$ ראשוני, אז גם n ראשוני.
ובכן, n הוא 2 או אי-זוגי.
על מנת להבין מהי ספרה אחרונה של m, צריך להבין מהו m מודולו 2 ומודול 5.
ברור שהוא מתחלק ב-2. נשאר לבדוק מה קורה מודולו 5.
מקרה את המקרה $n=2$ נבדוק בנפרד: נקבל $m=6$.
מעכשיו נניח כי n הוא ראשוני אי-זוגי. לכן $2^{n-1}=4^r=\left(-1\right)^r=\pm1\left(\mathrm{mod}\,5\right)$.
לכן $m=2^{n-1}\cdot\left(2^n-1\right)=\left(-1\right)^r\left(2\cdot\left(-1\right)^r-1\right)=2-\left(-1\right)^r=2\mp1\left(\mathrm{mod}\,5\right)$.
לכן יש רק שתי אפשרויות: 1 או 3, ולכן לפי משפט שאריות הסיני יש רק שתי אפשרויות עבור הספרה האחרונה של מספר מושלם: 6 או 8.

לפי מה שהוכחנו בשאלה הקודמת, המספרים $6=2\cdot3$, $28=4\cdot7$ מושלמים, לכן שתי האפשרויות לספרה האחרונה קיימות.

5. הוכח כי כל מספר מושלם זוגי, חוץ מ-6, ניתן להציג בתור סכום חזקות שלישיות של מספרים אי-זוגיים מ-1 ועד $2k+1$ (למשל $28=1^3+3^3$, או $496=1^3+3^3+5^3+7^3$).

פתרון. נשים לב כי $n^2\left(n+2\right)^2-\left(n-2\right)^2n^2=n^2\left(\left(n+2\right)^2-\left(n-2\right)^2\right)=8n^3$. לכן

$$1^3+3^3+5^3+...+\left(2s-1\right)^3=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\left(1^2\cdot3^2-\left(-1\right)^2\cdot1^2\right)+\left(3^2\cdot5^2-1^2\cdot3^2\right)+...+\left(\left(2s+1\right)^2\left(2s-1\right)^2-\left(2s-1\right)^2\left(2s-3\right)^2\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\left(2s+1\right)^2\left(2s-1\right)^2-1\right)=\frac{1}{8}\left(\left(4s^2-1\right)^2-1\right)=\frac{1}{8}\left(16s^4-8s^2\right)=\left(2s^2-1\right)s^2$$

ראינו בשאלות קודמות שכל מספר מושלם זוגי, חוץ מ-6, ניתן לרשום בתור $m=2^{n-1}\cdot\left(2^n-1\right)$, כאשר n מספר ראשוני אי-זוגי, לכן $2^{n-1}=s^2$.
לכן $m=s^2\cdot\left(2s^2-1\right)=1^3+3^3+5^3+...+\left(2\cdot2^s-1\right)^3$.