<u>תרגיל 2</u>

בכל השאלות של תרגיל זה מרכז המעגל החסום של משולש ABC יסומן I, והמעגל החוסם שלו יסומן ω.

1. המעגלים $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ הם שיקופים של המעגל החוסם ω ביחס לצלעות המשולש ABC. הוכיחו כי $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ נפגשים בנקודה אחת. הוכיחו שהגבהים של ABC גם עוברים דרך נקודה זאת.

פתרון. נניח שבמשולש ABC נקודת חיתוך הגבהים היא H. ניקח נקודה D עבורה AHBD מקבילית. אז DB מאונך ל-BC, DA מאונך ל-AC, לכן A, B נמצאים על מעגל שקוטרו CD. תהי E נקודה סימטרית ל-H ביחס ל-AB. אזי D סימטרית ל-E ביחס לאנך האמצעי של AB.
אכן, שילוב בין שיקוף ביחס ל-AB ושיקוף ביחס לאנך אמצעי ל-AB זה סיבוב ב-180° ביחס לאמצע AB, וזה יעביר את H ל-D.
נשים לב כי האנך האמצעי של AB הוא ציר סימטריה של המעגל ADBC, לכן גם E נמצא על מעגל.
מסקנה: שיקוף ביחס לצלע מעביר את H לנקודה על ω. לכן שיקוף של ω ביחס לצלע יוצר מעגל שעובר דרך H. לכן $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ נפגשים בנקודה אחת והיא H.

הערה. ניתן גם לחשב את הזוויות AHB, ACB. למשל במשולש עם זוויות A, B חדות אז הזוויות AHB, ACB הללו משלימות ל-180°, וקודקודיהם נמצאים באותו צד של AB, לכן לאחר שיקוף של אחת הנקודות יתקבלו 4 נקודות על מעגל. כמובן שצריך לבדוק גם את המקרה שבו זווית A או B כהה. מצד שני, בשיטה זו לא חייבים להניח כי הגבהים נפגשים בנקודה ואפשר להסיק את זה.

2. ABC הוא משולש, AI חותך שנית את ω בנקודה K.
א. הוכיחו כי המשולש KBI הוא שווה שוקיים, והסיקו כי KB = KI = KC.
ב. נסחו והוכיחו טענות דומות, כאשר במקום I יהיה מרכז של מעגל חסום מבחוץ.

פתרון. מספיק לבדוק כי $\sphericalangle KBI = \sphericalangle KIB$. נסמן: $2\alpha = \sphericalangle BAC$, $2\beta = \sphericalangle ABC$.
אזי $\sphericalangle KBI = \sphericalangle KBC + \sphericalangle CBI = \sphericalangle KAC + \beta = \alpha + \beta$.
גם $\sphericalangle KIB = \sphericalangle IAB + \sphericalangle IBA = \alpha + \beta$. כלומר אותו דבר. ובכן KB = KI.
באופן דומה KC = KI. מש"ל.

הערה. ניתן לראות באופן מיידי כי KC = KB, הרי המיתר AK מחלק את BAC לשני זוויות שוות, לכן הן נשענות על קשתות שוות של מעגל ABC, ולכן גם המיתרים שווים.

ב. יש שתי גרסאות נוספות של הטענה. (ביחד עם הטענה המקורית זה שלוש גרסאות).
יהי I_a מרכז של מעגל החסום מבחוץ לצלע BC. הוא נמצא על AK – חוצה הזווית הפנימית של הזווית A במשולש, ועל חוצי זוויות חיצונים של B ושל C. בדומה מגדירים את I_b, I_c.

טענה ב'. $KB = KI = KC = KI_a$.
טענה ג'. תהיה L נקודה מנוגדת ל-K של המעגל ω (במילים אחרות, אמצע הקשת BAC). אז $LI_b = LI_c = LB = LC$.

ניתן להוכיח את הטענות למרכזי המעגלים החסומים מבחוץ בדומה לסעיף א'.
זה תרגיל טוב בחשבון זוויות שהקוראים מוזמנים לעשות.

דרך אחרת היא לשים לב כי המעגל שקוטרו I_aI עובר דרך נקודות B, C. מרכז של המעגל הוא אמצע של הקטע I_aI, לכן גם נמצא על החוצה זווית של A, וגם נמצא על האנך האמצעי ל-BC. אם $AB \neq AC$, אז חוצה זווית של A ואנך אמצעי של BC נפגשים רק בנקודה אחת, והיא K ולכן רק היא יכולה להיות מרכז של המעגל I_aBIC.

במקרה בו $AB = AC$, הגישה הזאת לא תוכיח את טענה ב' (אבל בכל מקרה היא תוכיח טענה ג'). אבל הגישה שהצגנו בסעיף א' תעבוד בכל מקרה.

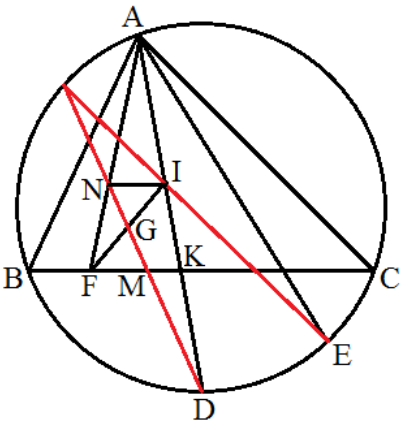
הערה. סעיף א' נקרא משפט התלתן.
בעצם, סעיף א', ביחד עם טענות ב', ג' זה בדיוק משפט על מעגל 9 נקודות. במשולש $I_aI_bI_c$ נקודת מפגש הגבהים היא I, עקבי הגבהים הם ABC, ולכן אמצעי הקטעים שמחברים כל זוג מבין הנקודות I_a, I_b, I_c, I נמצאים כולם על מעגל החוסם של ABC.

3. משולש ABC הוא שווה שוקיים: $BC = AC$. על הצלע AC קיימות n נקודות שונות $A_1,...,A_n$ ועל הצלע BC קיימות n נקודות שונות $B_1,...,B_n$, עבורן מתקיימים הזהויות: $AB = A_1B = A_1B_1 = A_2B_1 = A_2B_2 = ... = A_{n-1}B_n = A_nB_n = B_nC$ (ז. א. הקו השבור $ABA_1B_1A_2B_2...A_nB_nC$ הוא שווה צלעות).
מצאו את הזווית ACB (התשובה תלויה ב-n).
תשובה. $\frac{180^\circ}{4n+3}$
פתרון. נפרוס את הקו השבור $ABA_1B_1A_2B_2...A_nB_nC$ בצורה הבאה: בהתחלה נשקף את $BA_1B_1A_2B_2...A_nB_nC$ ביחס לישר BC, אחרי זה נשקף את $A_1B_1A_2B_2...A_nB_nC$ יחסית למיקום החדש של הישר A_1C, אחרי זה נשקף את $B_1A_2B_2...A_nB_nC$ יחסית לישר B_1C, וכך הלאה. נקבל סדרה של זוויות שוות שנשענות על קטעים שווים, ועל כל שני קרניים סמוכים לקרן כלשהי נקבל נקודות במרחק שונה מ-C. לכן כל 3 נקודות רצופות של קו השבור נמצאות על מעגל שעובר גם דרך C.
לכן כל הנקודות של הקו השבור לאחר "פריסה" יהיו על מעגל אחד.
נסמן ב-α את הזווית C של המשולש המקורי (זה גם הזווית בין כל שני קרניים סמוכים לאחר פריסה). אז הזווית A של מצולע המקורי הוא $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. לאחר פריסה, הזווית $90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle CAB$ נשענת על הקשת $BA_1B_1A_2B_2...A_nB_nC$, והיא פי $2n+1$ גדולה מהקשת BA_1 שזווית α נשענת עליה, ולכן $90^\circ - \frac{\alpha}{2} = (2n+1)\alpha$.
כלומר $180^\circ - \alpha = (4n+2)\alpha$, לכן $180^\circ = (4n+3)\alpha$.

4. משולש ABC אינו שווה שוקיים. המעגל החסום משיק ל-BC בנקודה D. AI חותך את ω שנית בנקודה M. MD חותך את ω שנית בנקודה P. הוכיחו כי $\sphericalangle API = 90^\circ$.

פתרון. לפי משפט התלתן, $MB = MI$. אנו נוכיח כי $MD \cdot MP = MB^2 = MI^2$.
לשם כך מספיק לבדוק כי $\frac{MB}{MD} = \frac{MP}{MB}$. זה נובע מדמיון משולשים $MBD \sim MPB$.
למשולשים יש זווית משותפת M, וגם זויות שוות $\sphericalangle MBD = \sphericalangle MPB$, הרי הן נשענות על קשתות שוות במעגל ω. ובכן $MD \cdot MP = MB^2 = MI^2$.
לכן גם $MID \sim MPI$.
נסמן $\sphericalangle A = \alpha,\ \sphericalangle B = \beta,\ \sphericalangle C = \gamma$. לה"כ $\beta > \gamma$ (המצב השני דומה).
$\sphericalangle MPA$ נשענת על הקשת $\overset{\frown}{MAC} = \overset{\frown}{MC} + \overset{\frown}{CA}$. לכן $\sphericalangle APM = \frac{1}{2}\alpha + \beta$.
$\sphericalangle API = \sphericalangle APM - \sphericalangle IPM$, לכן נותר לחשב את $\sphericalangle IPM$.
ראינו כי $MID \sim MPI$, לכן $\sphericalangle IPM = \sphericalangle MID$.
ID מקביל לגובה AH במשולש ABC, לכן מדובר בזווית בין חוצה הזווית לגובה מנקודה A במשולש ABC. הזווית BAH היא $90^\circ - \beta$, לכן $\sphericalangle IPM = \frac{1}{2}\alpha - \left(90^\circ - \beta\right)$.
לכן $\sphericalangle API = \sphericalangle APM - \sphericalangle IPM = \sphericalangle IPM = \left(\frac{1}{2}\alpha + \beta\right) - \left(\frac{1}{2}\alpha + \beta - 90^\circ\right) = 90^\circ$.
מש"ל.

5. במשולש ABC, הישר AI חותך את ω שנית בנקודה D. תהי E נקודה כלשהי על קשת BDC, ו-F נקודה על הקטע BC, כך ש-$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. תהי G האמצע של IF. הוכיחו כי הישרים EI, DG, והמעגל ω נפגשים בנקודה אחת.



פתרון. בעצם צריך להוכיח כי $\sphericalangle ADG = \sphericalangle AEI$.
נסמן ב-K את נקודת החיתוך של AD ו-BC.

קל הוכיח כי $AB \cdot AC = AK \cdot AD = AF \cdot AE$. זה נובע מדמיון משולשים $ABD \sim AKC$, $ABF \sim AEC$, מתוך חשבון זויות לא מסובך (למשל $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACK$ כי הן נשענות על אותה קשת, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAK$ מהגדרת חוצה זוית).
ניתן לראות את זה גם ללא חשבון זויות: שיקוף ביחס לישר AD בשילוב עם אינברסיה שמרכזה A ורדיוסה $\sqrt{AB \cdot AC}$ יעביר את B ל-C, את C ל-B, ואת הישר BC למעגל ABC ולהפך, את E ל-F אות F ל-E, ומכאן מתקבלת אותה מסקנה.

בכל מקרה, מהנוסחה $AK \cdot AD = AF \cdot AE$ מתקבל כי $AFD \sim AKE$ (הרי גם $\sphericalangle FAD = \sphericalangle KAE$), ולכן $\sphericalangle AEK = \sphericalangle ADF$. זה מזכיר קצת את מש"ל (למשל ניתן להסיק כי EK ו-DF נפגשים על ω) אבל זה עוד לא מש"ל.
הישר DG חותך את הצלעות AB ו-BC בנקודות N ו-M בהתאמה. היינו רוצים להוכיח ש-$\frac{AN}{NF} = \frac{AI}{IK}$. בינתיים ידוע לנו כי $AFD \sim AKE$, לכן מספיק לבדוק כי $AND \sim AIE$.

זה שקול לכך, ש-NI מקביל ל-BC.
במקרה הפרטי המנוון בו F מתלכד עם B, לא קשה לראות את זה: לפי משפט התלתן, האנך האמצעי ל-BI שעובר דרך G עובר גם ב-D, ואז BNIM הוא סימטרי ביחס לאנך אמצעי זה (שהו הישר DG) ולכן BNIM מעוין, לכן אכן IN מקביל ל-BM.
במקרה הכללי: היחסים $\frac{DI}{IA},\frac{IG}{GF}=1,\frac{FN}{NA}$ קשורים על ידי משפט מנלאוס. הראשוו מהם לא תלוי במיקום של F, לכן גם האחרון לא. לכן מספיק לבדוק את זה במצב אחד בלבד, מש"ל.

6. ABCD מרובע חסום. במשולשים BCD, CDA, DAB, ABC מרכזי המעגלים החסומים הם I_1,I_2,I_3,I_4 ונקודות מפגש הגבהים הם H_1,H_2,H_3,H_4.
א. הוכיחו כי המרובע $H_1H_2H_3H_4$ חופף למרובע ABCD.
ב. הוכיחו כי $I_1I_2I_3I_4$ הוא מלבן.

א. פתרון חישובי. ברישום ווקטורי, אם משולש ABC חסום במעגל שמרכזו 0, אז נקודת חיתוך הגבהים שלו היא H = A+B+C.
אכן, $\langle H-A,B-C\rangle=\langle B+C,B-C\rangle=\langle B,B\rangle-\langle C,C\rangle=0$, לכן HA מאונך ל-BC, באופן דומה גם HB מאונך ל-AC, וגם HC מאונך ל-AB.
מכאן $H_4=A+B+C=S-D$, כאשר $S=A+B+C+D$ ואופן דומה בדומה גם $H_4=S-A,\ H_2=S-B,\ H_3=S-C$, לכן המרובע $H_1H_2H_3H_4$ הוא סיבוב של ABCD ב-180° ביחס ל-$\frac{S}{2}$.

פתרון גיאומטרי. נזכיר את מה שהוכחנו בשאלה 1, אבל בניסוח טיפה שונה. במשולש ABC, שהגבהים שלו נחתכים בנקודה H, הגובה AH חותך את המעגל החוסם ω פעמיים: בנקודה A ונקודה שסימטרית ל-H ביחס ל-BC.
למען נוחות, ניתן לנקודות A, B, C, D סימון נוסף: A_1,A_2,A_3,A_4 בהתאמה.
יהיו i,j,k,l אינדקסים שונים בין 1 ל-4. אז הגבהים מנקודות A_k, A_l על הישר A_iA_j יחתכו את המעגל ω שוב בנקודות S,T בהתאמה, כאשר $ST=A_kA_l$, מטעמי סימטריה (ביחס לקוטר של ω שמקביל ל-A_iA_j). מצד שני, S, T סימטריים ל-H_k, H_l יחסית לישר A_iA_j, לכן $H_kH_l=ST=A_kA_l$. וזה לכל זוג אינדקסים k,l.
לכן $A_iA_jA_k\cong H_iH_jH_k$ לכל 3 אינדקסים i,j,k ולכן גם $A_1A_2A_3A_4\cong H_1H_2H_3H_4$.

ב. מחשבון זוויות פשוט מתקבל: $\sphericalangle AI_3B=90^\circ+\sphericalangle ADB=90^\circ+\sphericalangle ACB=\sphericalangle AI_4B$ ולכן המרובע AI_3I_4B חסום, כמו גם המרובעים BI_4I_1C, CI_1I_2D, DI_2I_3A. לכן
$$\sphericalangle I_1I_2I_3=360^\circ-\sphericalangle I_1I_2D-\sphericalangle I_3I_2D=360^\circ-\left(180^\circ-\sphericalangle I_1CD\right)-\left(180^\circ-\sphericalangle I_3AD\right)=$$
$$=\sphericalangle I_1CD+\sphericalangle I_3AD=\tfrac{1}{2}\sphericalangle BCD+\tfrac{1}{2}\sphericalangle BAD=\tfrac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$$

באופן דומה $\sphericalangle I_2I_3I_4=\sphericalangle I_1I_4I_3=\sphericalangle I_4I_1I_2=90^\circ$. מש"ל.