תרגיל 21

1. על שולחן עגול נמצאים 64 מטבעות עגולים, כאשר רדיוס של כל מטבע סנטימטר אחד, ואי-אפשר להניח על השולחן מטבע נוסף שלא יגע במטבעות שכבר יש. הוכח\הוכיחי שרדיוס השולחן הוא 17 סנטימטרים לכל היותר.

פתרון. לכל מטבע נגדיר את נגדיר עיגול, שמרכז שלו כמו המרכז של מטבע, אבל רדיוס שלו 2 ס"מ. אז אסור לשים מטבע עם מרכז בנקודה מסוימת, אך ורק כאשר הוא נמצא באחד העיגולים המורחבים. אם R הוא רדיוס השולחן , אז מרכז של כל מטבע מכוסה נמצא בעיגול יותר קטן שרדיוסו $R-1$. שטח של תחום זה $\pi\left(R-1\right)^2$. לכן אם אי אפשר לשים מטבע נוסף, אז רדיוס השטח הזה מכוסה על ידי 64 עיגולים בעלי רדיוס 2, כלומר השטח אינו עולה על $64\cdot\pi\cdot 2^2$. לכן $\pi\left(R-1\right)^2\geq\pi\cdot 16^2$. לכן $R-1\geq 16$, כלומר $R\geq 17$. מש"ל.

2. הוכח\הוכיחי כי כל N נקודות במישור ניתן לכסות במספר עיגולים, כן שסכום הקטרים שלהם קטן מ-N, ומרחק בין כל שני עיגולים גדול מ-1. (מרחק בין שתי קבוצות זה מרחק הכי קטן בין נקודה בקבוצה ראשונה לנקודה בקבוצה שנייה).

פתרון. בתור ניסיון ראשון אפשר לקחת מעגל בעל רדיוס $\frac{1}{10N}$ עם מרכז בכל נקודה נתונה. סכום הקטרים יהיה $\frac{1}{5}$. כעת נבצע את התהליך הבא. בכל מהלך נבחר זוג עיגולים שמרחק בינם קטן מ-1. נתבונן בישר שמכיל את המרכזים של שניהם. על ישר זה העיגולים מיצרים שני קטעים, שהן קטרי העיגולים, והמרחק בינם קטן מ-1. ניקח קטע מינימאלי שמכיל את שני הקטעים. זה יהיה קוטר של עיגול חדש, ואת שני העיגולים הקודמים אפשר למחוק, כי העיגול החדש יכיל את שניהם.
אם יש הרבה זוגות של עיגולים קרובים, אפשר לבחור בכל מהלך זוג כלשהו בצורה שרירותית. בכל מקרה, בכל מהלך כמות העיגולים יורדת ב-1 וסכום קטרים עולה לכל היותר ב-1. מתישהו המשחק ייעצר עקב חוסר מהלכים; עם נגיע למצב של עיגול אחד, המשחק בטוח ייעצר. לכן כמות המהלכים במשחק לא עולה על $N-1$. לכן סכום הקטרים בסוף המשחק אינו עולה על $\frac{1}{5}+N-1=N-\frac{4}{5}$.

3. חילזון התקדם במהלך T דקות בציר חד-מימדי. מספר צופים השגיחו על ההתקדמות של החילזון. כל צופה התבונן בחילזון דקה ברצף, וראה שהחילזון התקדם במטר בדיוק. בכל רגע נתון, החילזון היה תחת השגחה. מהו המרחק המינימאלי האפשרי והמקסימאלי האפשרי, שהחילזון היה יכול לעבור?

תשובה. לפחות $1+\left\lfloor\frac{T}{2}\right\rfloor$ מטרים ולכל היותר $2\left\lceil T-1\right\rceil$ מטרים כאשר $T>1$;
כאשר $T=1$ אז ההתקדמות היא 1 מטר בכל מקרה.

פתרון. ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות, כי בכל רגע יש משגיח אחד או שני משגיחים. אם ברגע מסוים יש שלושה משגיחים, אפשר למיין אותם בסדר כרונולוגי: הראשון שהגיע (הוא גם הראשון שיעזוב), השני שהגיע, ... , האחרון שהגיע. את כל המשגיחים חוץ מהראשון והאחרון ניתן לשחרר בלי לפגוע ברציפות ההשגחה.
נניח שהיו בתקופה באורך T סה"כ M משגיחים. אז $\frac{1}{2}M \le T \le M$, לכן M שייך לתחום $\left[\left\lceil T \right\rceil, \left\lfloor 2T \right\rfloor\right]$. כל אחד מהמשגיחים ראה התקדמות של מטר, לכן סה"כ הם ראו 2M מטרים של התקדמות. אבל יש התקדמויות שנצפו פעמיים, ויש התקדמויות שנצפו פעם אחד, לכן ההתקדמות הכוללת היא לכל היותר M ולפחות $\frac{1}{2}M$. לכן בסה"כ ההתקדמות היא לפחות $\frac{1}{2}\left\lceil T \right\rceil$ ולכל היותר $\left\lfloor 2T \right\rfloor$. ננסה לבנות את הדוגמאות לשני הדברים (או להתקרב ככל האפשר).

נניח שאנחנו רוצים לבנות את $\left\lfloor 2T \right\rfloor$. אז כל משגיח צריך לצפות בהתקדמות של מטר אצל חילזון לבד, מצד שני כמעת בכל רגע צריכים להיות שני משגיחים. אם T שלם, אז זה לא יכול להתקיים בו-זמנית: אם יש בדיוק 2T משגיחים, אז בכל רגע משגיחים שניים בדיוק, ואז ההתקדמות היא T מטרים לכל היותר. לכן במקרה של T שלם, צריך לקחת לכל היותר $2T-1$ משגיחים (אם רוצים שההתקדמות תהיה גדולה מ-T). נשים לב גם, שכאשר יש מספר אי-זוגי $2k+1$ של משגיחים, אז הזמן הוא לפחות $k+1$. אכן, תקופות ההשגחה של הראשון, השלישי, החמישי, ..., ה-$2k+1$ זרות.
נניח כי T אינו שלם. נחלק את הזמן ל-$\left\lfloor T \right\rfloor$ תקופות שוות, כל תקופה יותר ארוכה מדקה אחת (אבל קצרה יותר משתי דקות). בכל תקופה נשים שני משגיחים, אחד ישגיח על תחילת התקופה והשני על הסוף, סה"כ $2\left\lfloor T \right\rfloor$ משגיחים, ולכל משגיח יש פרק זמן שבו רק הוא משגיח. נניח שחילזון יעמוד במקום כל פעם שיש שני משגיחים, וכל פעם שנשאר משגיח אחד הוא יתקדם מטר אחד. אז החילזון יתקדם ב-$2\left\lfloor T \right\rfloor$ מטרים.
זה מתאים לחסם שמצאנו כאשר T לא שלם בתנאי ש-$\left\lfloor 2T \right\rfloor = 2\left\lfloor T \right\rfloor$.
בכל מקרה $\left\lfloor 2T \right\rfloor \le 2\left\lfloor T \right\rfloor$, והשוויון מתקיים כאשר $\left\lfloor 2T \right\rfloor$ זוגי. נניח כי $\left\lfloor 2T \right\rfloor$ אי-זוגי. במקרה זה אפשר לשפר את החסם שלנו. אכן, נניח כי $\left\lfloor 2T \right\rfloor = 2k+1$ אי-זוגי ואנחנו ננסה לשבץ $2k+1$ משגיחים, אז המשגיח הראשון, השלישי, ..., ה-$2k+1$ זה ביחד $k+1$ משגיחים, ומשגיחים על תקופה גדולה מ-T, לכן לשניים מהם יש חיתוך. לכן יש משגיח מיותר (למשל אם משגיח שלישי נחתך עם משגיח חמישי, אז המשגיח הרביעי מיותר) ואפשר לשחרר אותו. לכן ניתן להניח לה"כ שיש לכל היותר $2k$ משגיחים, כלומר בכל מקרה יש לכל היותר $2\left\lfloor T \right\rfloor$ משגיחים לה"כ, לכן החילזון לא יתקדם יותר מאשר $2\left\lfloor T \right\rfloor$ מטרים, ולזה בנינו דוגמה לכל T לא שלם.
נניח כי T שלם. אפשר להשתמש בדוגמה הקודמת עבור $T-1$: מחלקים את הזמן ל-$T-1$ תקופות באורך יותר גדול מדקה, ובכל תקופה שמים שני משגיחים (בהנחה ש-T גדול מ-1; כאשר $T=1$ אז יש משגיח אחד בכל מקרה). בשביל להוכיח שאי-אפשר יותר, נשים לב שאם יש $2T-1$ אז או שיש משגיח מיותר, או שהמשגיחים הראשון, השלישי, ה-$2T-1$ השגיחו רצוף כל הזמן, ואז ההתקדמות היא T לכל היותר. אחרת לשניים מבין המשגיחים האי-זוגיים היה חיתוך, ויש משגיח זוגי מיותר. ואם יש $2T-2$ משגיחים התקדמות היא $2T-2$ מטרים לכל היותר, כמו בדוגמה.

נניח שאנחנו רוצים לבנות דוגמא עבור $\lceil \frac{1}{2}T \rceil$. בשביל זה צריך, שכל התקדמות של חילזון תתבצע תחת השגחה של שני משגיחים, ומצד שני כמעת בכל רגע נתון תהיה השגחה של משגיח אחד בלבד.

תחילה נניח כי T לא שלם, $\lceil \frac{1}{2}T \rceil$ שלם. נחלק את התקופה T ל-$\lceil \frac{1}{2}T \rceil$ תקופות שוות, כאשר אורך של כל תקופה היא קצת יותר קטנה מ-2 דקות (כל עוד T לא שלם). בתקופה זאת נשבץ שני משגיחים: אחד בתחילת התקופה, והשני בסוף. ההתקדמות של חילזון יהיה של מטר, באמצע של התקופה (כאשר שני המשגיחים צופים). זו הדוגמה.

עבור $\lceil T \rceil$ אי-זוגי, אי-אפשר לבנות דוגמה כזאת, ובשביל זה צריך להשתמש בשיקולים יותר עדינים. נניח כי M, כמות המשגיחים, הוא אי-זוגי. אז נניח כי החילזון התקדם מרחק x_1 בתקופת השגחה משותפת של הראשון והשני, x_2 תחת השגחה משותפת של השני השלישי, ..., x_{M-1} בתקופת ההשגחה המשותפת של שני המשגיחים האחרונים.

אז $x_1 + x_2 \le 1$, וגם $x_3 + x_4 \le 1$, ..., וגם $x_{M-2} + x_{M-1} \le 1$, ואם נחבר את $\frac{M-1}{2}$ אי-שוויונים אלה, נקבל שתחת השגחה כפולה החילזון התקדם לכל היותר $\frac{M-1}{2}$ מטרים.

מצד שני, סה"כ השגיחו על התקדמות של חילזון של M מטרים, ורק $M-1$ מתוך זה מגיע מהשגחה כפולה, לכן מטר התבצע בהשגחת יחיד. לכן ההתקדמות של חילזון לא עולה על $\frac{M+1}{2}$ מטרים. דוגמה לזה קל לבנות מהדוגמה הקודמת, כאשר מוסיפים משגיח אחד בסוף שמשגיח על הדקה האחרונה של התקדמות לבד. כך מגדילים את T ב-1 וגם את הזמן ב-1.

אם T שלם וזוגי, אז הדוגמה הראשונה של $\lceil \frac{1}{2}T \rceil$ מטרים לא תעבוד, כי אם יש בדיוק T משגיחים בדיוק, אז אין להם חפיפה בכלל, ואז החילזון יעבור T מטרים. לכן צריכים לפחות T+1 משגיחים, וזה מספר אי-זוגי, לכן יהיה רק $\frac{1}{2}T$ דקות של השגחה כפולה ועוד דקה של השגחת יחיד סה"כ $\frac{1}{2}T+1$ דקות. ודוגמה לזה זהה לדוגמה האחרונה.

אם T שלם ואי-זוגי, אז יש לפחות T משגיחים, אבל T משגיחים יוביל אותנו ל-T דקות כי אין חפיפה. אם לוקחים T+1 משגיחים או יותר, אפשר לבנות דוגמה עם $\frac{T+1}{2}$ מטרים של התקדמות כוללת, באופן זהה לגמרי לדוגמה הראשונה.

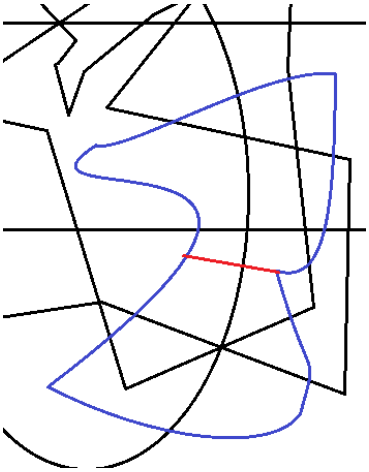
4. על דף משבצות אינסופי, כל המשבצות שחורות או לבנות (לאו דווקא צביעת שח רגילה), ולכל משבצת שחורה יש מספר זוגי של משבצות שחורות סמוכות (לפי צלע). הוכח\הוכיחי כי אפשר לצבוע את כל המשבצות הלבנות בשני צבעים, אדום וירוק, כך שבסמוך לכל משבצת שחורה תהיה אותה כמות של משבצות אדומות וירוקות.

פתרון. הפתרון מבוסס על טענה מעניינת:

טענה. מפה מישורית ניתן לצבוע בשני צבעים, שחור ולבן, כך שארצות סמוכות תמיד בצבע שונה, אך ורק כאשר דרגות של כל הקודקודים זוגיות.

אנחנו נוכיח את הטענה בסוף הפתרון. כעת נשתמש בטענה על מנת לפתור את השאלה.
ניצור גרף, שקודקודיו הן מרכזי המשבצות השחורות, וקודקודים שמתאימים למשבצות סמוכות מחוברים. בגרף זה הדרגות זוגיות לפי הנתון. לכן את התחומים שאליהם הגרף מחלק את המישור ניתן לצבוע בשני צבעים, שנקרא להם 0 ו-1.
לכל משבצת לבנה ניקח את מספר השורה שלה (שזה מספר שלם) ונוסיף את הצבע שהגדרנו, 0 או 1. אם יוצא מספר זוגי, נצבע את המשבצת הלבנה בירוק, ואם לא, אז באדום.
נבדוק שצביעה זאת מקיימת תנאים. ניקח משבצת שחורה כלשהי. אם יש לה 4 שכנים שחורים, אז יש אותו מספר של שכנים ירוקים ואדומים.
אם יש שני שכנים שחורים, הם יכולים להיות מנוגדים או בזווית של 90°.
אם השכנים מנוגדים, אז למשבצת השחורה היו שני שכנים לבנים מנוגדים, שנמצאים בתחומים לבנים סמוכים, שלאחד מהם יחסנו צבע 0 ולשני צבע 1. מצד שני, לשני השכנים הלבנים אותה זוגיות למספר שורה. לכן אחד מהם אדום והשני ירוק.
אם השכנים השחורים סמוכים, אז השכנים הלבנים נמצאים בשורות סמוכות עם זוגיות שונה, ומצד שני באותו תחום לבן (מצבע 0 או 1). לכן אחת מהמשבצות בסוף מקבלת צבע ירוק והשנייה אדום.
אם למשבצת שחורה יש 4 שכנים לבנים, אז בגרף היא לא מחוברת לכלום, לכן השכנים שלה נמצאים באותו תחום לבן. לכן הבדלי הצבעים של המשבצות נקבעים לפי זוגיות השורה, ולכן שתי משבצות תהיינה ירוקות ושתיים אדומות.
ובכן, בבניה שלנו בכל מקרה יש שתי משבצות אדומות ושתי משבצות ירוקות, כמו שצריך. נשאר להוכיח את הטענה.

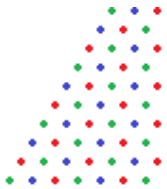
הוכחת הטענה. קל לראות, שאם יש קודקוד בדרגה אי-זוגית, אז אפילו את התחומים שנפגשים בקודקוד הזה לא ניתן לצבוע בשני צבעים.
כעת נניח שכל הקודקודים זוגיים. המטרה היא להוכיח, שניתן לצבוע את המפה בשני צבעים. ניקח ארץ כלשהי ונצבע אותה בשחור. את השכנים שלה נצבע בלבן. נמשיך בתהליך זה: בכל שלב ניקח שכנים של הארצות שכרגע נצבעו, ונצבע אותם בצבע הפוך. כך נגיע למצב, שצבע את כל הארצות. נוכיח, שזאת צביעה העונה על כל התנאים.
הבעיה היחידה שיכולה להופיע, שניצור שתי ארצות סמוכות בצבעים זהים. זאת אומרת



שיש מסלולים (שלא עובר דרך קודקודים) מהארץ המקורית לשתי הארצות השכנות, אם אותה זוגיות. אם נחבר את שני המסלולים הארצות ביחד אם מעבר בין שתי הארצות, נקבל מסלול סגור על המפה שחוצה מספר אי-זוגי של גבולות.
ובכן, מספיק להוכיח שאין במפה זאת מסלולים, שחוצים מספר אי-זוגי של גבולות.
נניח שיש כזה מסלול. ניתן להניח שמסלול כזה לא חותך את עצמו, אחרת הוא מתפרק לאיחוד של שני מסלולים סגורים שאחד מהם גם חותך מספר אי-זוגי של גבולות, ואז אפשר להקטין את המסלול.
אם בתוך המסלול מוכל רק קודקוד אחד של גרף, אז כמות הגבולות שהמסלול חותך שווה לדרגת הקודקוד וזה מספר זוגי. אם יש יותר קודקוד אחד (כמו במסלול הכחול בציור) נעביר קטע אדום שמפריד קודקודים. הקטע האדום

מחלק את המסלול הכחול לשני חלקים, וביחד עם כל חלק זה קטע אדום יוצר מסלול. אחד מבין המסלולים האלה אי-זוגי. כך אפשר לעבור למסלול אי-זוגי שמכיל פחות קודקודים. אבל אם נמשיך להקטין את המסלול בצורה כזאת, נקבל מסלול אי-זוגי שעוקף נקודה אחת בלבד. סתירה.

5. במשולש משוכלל שכל גובה שלו שווה 70, סומנו כל הנקודות שהמרחקים מהן לכל הצלעות הם מספרים שלמים (גם נקודות פנימיות וגם נקודות על היקפו, כולל קודקודיו). הוכח\י שניתן לבחור 150 נקודות מבין הנקודות המסומנות, שאף 3 מהן לא יוצרות משולש משוכלל (מסתכלים על כל המשולשים המשוכללים, לאו דווקא כאלה שצלעותיהם מקבילות לצלעות המשולש המקורי).



פתרון. ניתן לצבוע את הנקודות ברשת המשולשית ב-3 צבעים, כמו בציור. בכל אחד מהצבעים נוצרת רשת דומה, אבל עם מרחקים גדולים פי $\sqrt{3}$. קל לראות, שסיבוב ב-60° מסביב לנקודה אדומה כלשהי מחליפה בין נקודות ירוקות לכחולות. לכן בכל משולש משוכלל, צבעי הקודקודים כולם שונים, או כולם אותו דבר. לכן אם נבחר מספר נקודות משני צבעים בלבד, נגיד כחול ואדום, ונדאג שבאף צבע לא יהיה משולש משוכלל, אז בכלל לא יהיו משולשים משוכללים.
נשדרג את השיטה הזאת. תחילה נחלק את כל הנקודות לשלושה סוגים לפי צבעים: 0, 1, 2. נשים לב, ששריג הנקודות האדומות דומה לשריג כל הנקודות (עם מקדם $\sqrt{3}$), וכך גם שריג של נקודות ירוקות וכחולות. בכל צבע נעשה שוב חלוקה לצבעים: למשל את צבע 0 נחלק לצבעים 00, 01, 02, את צבע 1 נחלק לצבעים 10, 11, 12 וכו'. נמשיך: כל צבע שיש לו מספר של שני ספרות נחלק באותה צורה ל-3 צבעים, ממוספרים על ידי 3 ספרות, למשל צבע 00 יחולק לצבעים 000, 001, 002.
כבר הערנו, שאם יש משולש משוכלל שקודקודיו הם קודקודי רשת משולשית, אז או שכל קודקודיו בצבעים שונים, או שכולם באותו צבע. לכן נבנה את הדוגמה בשיטה הבאה.
בהתחלה נוותר על אחד מבין 3 צבעים 0, 1, 2. סה"כ יש לנו $\frac{71\cdot 72}{2}=71\cdot 36=2130+426=2556$ קודקודים, ונוותר על השליש הקטן, לכן $\frac{2}{3}$ מהכול יישארו, כלומר לפחות $\frac{2}{3}\cdot 2556=1704$.
כעת, בכל צבע של ספרה אחת, נוותר על אחד מבין הצבעיים של שתי ספרות. אז לכל משולש משוכלל שיישאר, כל קודקודיו יהיו מאותו סוג של שתי ספרות. יישארו $\frac{2}{3}\cdot 1704=1136$ קודקודים לפחות.
נמשיך באותה צורה. בשלב שלישי, נוותר בכל סוג של שני ספרות על אחד הצבעים (בקטן יותר) של שלוש ספרות. יישארו לפחות $\frac{2}{3}\cdot 1136=757\frac{1}{3}$, כלומר לפחות 758 נקודות.
בשלב רביעי, נוותר בכל סוג של שלוש ספרות על אחד הסוגים של 4 ספרות. יישארו לנו לפחות $\frac{2}{3}\cdot 758=505\frac{1}{3}$ כלומר לפחות 506 נקודות.

בשלב חמישי יישארו לפחות $\frac{2}{3}\cdot 506 = 337\frac{1}{3}$ כלומר לפחות 338 נקודות. בשלב שישי יישארו לפחות $\frac{2}{3}\cdot 338 = 225\frac{1}{3}$, כלומר לפח ות 226. בשלב שביעי יישארו לפחות $\frac{2}{3}\cdot 226 = 150\frac{1}{3}$ נקודות, כלומר לפחות 151 נקודות.



נוכיח כי מהנקודות שנשארו לא ניתן ליצור משולש משוכלל. נניח מעכשיו, שהמרחק המינימלי בין נקודות שריג הנתונות הוא 1. נניח שיש משולש משוכלל מבין הנקודות שנשארו. אז לכל קודקודי המשולש יש אותו סוג 7-ספרתי. לכן האורך המינימלי שיכול להיות לצלע של משולש זה $\sqrt{3}^7$, יכול להיות גם יותר גדול כמו $\sqrt{3}^8$ או $2\cdot\sqrt{3}^7$, אבל אפילו $\sqrt{3}^8$ זה כבר 81 ואין מרחקים כאלה בין הנקודות הנתונות. אם היינו מצליחים למצוא משולש שצלעותיו באורך $\sqrt{3}^7$ וקודקודיו מאותו סוג 7-ספרתי, אז המשולש הזה היה מסוסב ב-30° ביחס לצלעות של שריג, המשולש המשוכלל המינימלי שמכיל אותו שמיושר עם השריג, עורך צלעותיו הוא $\sqrt{3}^8$ כמו שרואים בקלות מהציור. זה בלתי אפשרי: כל הנקודות מוכלות במשולש שצלעותיו 70, ואנחנו צריכים 81.

6. מהו המספר המרבי של נקודות, שאף שלוש מהן לא נמצאות על ישר אחד, ולמשולשים שהן יוצרות אין זוויות קהות
א. במישור?
ב. במרחב תלת-מימדי?

תשובה. א. 4. ב. 8.

פתרון. נניח שהנקודות שלנו הן $A_1, A_2, ..., A_n$. נשים לב שלכל זוג נקודות A_i, A_j בקבוצה שלנו ניתן ליצור פס שחסום על ידי ישרים (אן מישורים במקרה תלת ממדי) שעוברים דרך A_i, A_j בהתאמה ומאונכים לקטע A_iA_j. נסמן את הפס הזה ב-$\Pi_{i,j}$. לפי הדרישה, $\Pi_{i,j}$ מכיל את כל הנקודות A_k. קל לראות, שכל A_i נמצא על הגבול של הקמור של $A_1, A_2, ..., A_n$: הרי אחרת $\Pi_{i,j}$ לא מכיל חלק מקודקודי הקמור.

א. דוגמה ל-4 נקודות: קודקודי הריבוע. כל המשולש שנוצרים חופפים, ואין בהם זוויות כהות.
נניח שיש 5 נקודות. כל הנקודות על גבולות הקמור. אף נקודה לא על הצלע, אחרת יש 3 נקודות על ישר אחד, לכן כל נקודה היא קודקוד של קמור. לכן יש מחומש משוכלל. אבל למחומש משוכלל יש זווית כהה, כי סכום זוויותיו $3\cdot 180^\circ$ שזה יותר מ-$5\cdot 90^\circ$.

ב. דוגמה ל-8 קדקודים: קובייה. קל לראות שמכל קודקוד רואים כל זוג קודקודים בזווית ישרה או חדה. צריך להוכיח, שאי-אפשר 9.

נתבונן בפאון V שהוא הקמור של $A_1, A_2, ..., A_n$ (אם כל הנקודות במישור, אז יש רק 4 לפי סעיף א').

אנחנו נגיד, שקבוצות במרחב **זרות**, אם נפח החיתוך שלהן 0.

הזזה של V בווקטור $\overrightarrow{A_1A_i}$ מעב יוצרת פאון V_i. הפאונים האלה זרים זה לזה, וזרים ל-$V_1 = V$: הרי הפאון V_i מתקבל מ-V_j באמצעות הזזה בווקטור $\overrightarrow{A_jA_i}$, והזזה כזאת מעבירה פס $\Pi_{i,j}$ לפס שזר לו, ולכן גם את V לפאון שזר לן.

בכל מקרה, $\bigcup_{i=1}^{n} V_i \subset V + V$, כאשר + כאן מסמן סכום מינקובסקי (בהנחה ש-A_1 היא ראשית הצירים), לכן סכום נפחי V_i קטן מ-8 פעמים הנפח של V (הרי הומותטיה עם מקדם 2 מגדילה את הנפח פי 8). מצד שני לכולם יש נפח כמו ל-V. לכן כמות הנקודות קטנה מ-8.