תרגיל 21

1. על שולחן עגול נמצאים 64 מטבעות עגולים, כאשר רדיוס של כל מטבע סנטימטר אחד, ואי-אפשר להניח על השולחן מטבע נוסף שלא יגע במטבעות שכבר יש. הוכח\הוכיחי שרדיוס השולחן הוא 17 סנטימטרים לכל היותר.

2. הוכח\הוכיחי כי כל N נקודות במישור ניתן לכסות במספר עיגולים, כן שסכום הקטרים שלהם קטן מ-N, ומרחק בין כל שני עיגולים גדול מ-1. (מרחק בין שתי קבוצות זה מרחק הכי קטן בין נקודה בקבוצה ראשונה לנקודה בקבוצה שנייה).

3. חילזון התקדם במהלך T דקות בציר חד-מימדי. מספר צופים השגיחו על ההתקדמות של החילזון. כל צופה התבונן בחילזון דקה ברצף, וראה שהחילזון התקדם במטר בדיוק. בכל רגע נתון, החילזון היה תחת השגחה. מהו המרחק המינימאלי האפשרי והמקסימאלי האפשרי, שהחילזון היה יכול לעבור?

4. על דף משבצות אינסופי, כל המשבצות שחורות או לבנות (לאו דווקא צביעת שח רגילה), ולכל משבצת שחורה יש מספר זוגי של משבצות שחורות סמוכות (לפי צלע). הוכח\הוכיחי כי אפשר לצבוע את כל המשבצות הלבנות בשני צבעים, אדום וירוק, כך שבסמוך לכל משבצת שחורה תהיה אותה כמות של משבצות אדומות וירוקות.

5. במשולש משוכלל שכל גובה שלו שווה 70, סומנו כל הנקודות שהמרחקים מהן לכל הצלעות הם מספרים שלמים (גם נקודות פנימיות וגם נקודות על היקפו, כולל קודקודיו). הוכח\י שניתן לבחור 150 נקודות מבין הנקודות המסומנות, שאף 3 מהן לא יוצרות משולש משוכלל (מסתכלים על כל המשולשים המשוכללים, לאו דווקא כאלה שצלעותיהם מקבילות לצלעות המשולש המקורי).

6. מהו המספר המרבי של נקודות, שאף שלוש מהן לא נמצאות על ישר אחד, ולמשולשים שהן יוצרות אין זוויות קהות
א. במישור?
ב. במרחב תלת-מימדי?