תרגיל 20

1. בהינתן $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$, הוכח\י כי $a^{17}+b^{17}+c^{17}=(a+b+c)^{17}$.

פתרון ראשון. נתבונן במספרים $a,b,c,d=-a-b-c-d$.
באופן כללי, אם נסמן $s_n=a^n+b^n+c^n+d^n$. אז לפי משפט ידוע, כל פולינום סימטרי ב-a,b,c,d ניתן לרשום בתור פולינום ב-s_1,s_2,s_3,s_4. בפרט, את s_{17} ניתן לרשום כפולינום ב-s_1,s_2,s_3,s_4, ובכול מונום של פולינום זה מופיע s_1 או s_3, כי החזקה חייבת לצאת אי-זוגית.
אבל במקרב שלנו $s_1=s_3=0$ לכן הערך של פולינום זה הוא 0.

פתרון שני. נתבונן בשני מקרים: $a+b=0$ ו-$a+b\neq 0$.
במקרה הראשון $(a+b+c)^{17}=c^{17}=a^{17}+b^{17}+c^{17}$.
במקרה $a+b\neq 0$, נסמן $y=a+b+c$, $x=-c$. אז נתון כי

$$a+b=x+y$$
$$a^3+b^3=x^3+y^3$$

נחלק את המשוואה האחרונה במשוואה הקודמת, ונקבל

$$a^2-ab+b^2=x^2-xy+y^2$$

אבל מצד שני

$$a^2+2ab+b^2=x^2+2xy+y^2$$

נחסיר ונקבל

$$3ab=3xy$$

ובכן, גם זוג x,y וגם זוג a,b אלה שני השורשים של אותה משוואה ריבועית. לכן $x=-c$ שווה ל-a או ל-b. לכן המקרה הזה שקול למקרה הראשון שבדקנו (אבל עם סדר אחר של אותיות).

פתרון שלישי. נפתח סוגריים בנתון ונצמצם:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$$
$$a^3+b^3+c^3=\sum_{cyc}a^3+3\sum_{sym}a^2b+6abc$$
$$0=3\sum_{sym}a^2b+6abc$$
$$0=\sum_{sym}a^2b+2abc$$
$$abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

או בסימון מקוצר $\sigma_3=\sigma_1\sigma_2$, כאשר σ_i לפי משפט וייטא זה מקדמי הפולינום
$x^3-\sigma_1x^2+\sigma_2x-\sigma_3$.

קל לראות שגם σ_1 הוא שורש, הרי $\sigma_1^3-\sigma_1\cdot\sigma_1^2+\sigma_2\sigma_1-\sigma_3=0$. ללא הגבלת הכלליות, $c=\sigma_1=a+b+c$. לכן $a+b=0$. מכאן $b=-a$ והטענה ברורה.

2. בהינתן $a+b+c+d=0$, חשב\י את $\frac{abc+abd+acd+bcd}{a^3+b^3+c^3+d^3}$.

הערה. כידוע, כל פולינום סימטרי ב-a,b,c,d הוא פולינום ב-$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ כאשר σ_i הם פולינומי וייטא: $\sigma_1=a+b+c+d$, $\sigma_2=ab+ac+bc+ad+bd+cd$, $\sigma_3=abc+abd+acd+bcd$, $\sigma_4=abcd$.
בפרט $a^3+b^3+c^3+d^3$ הוא פולינום ב-$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$. אבל σ_4 לא משתתף כי חזקה שלו גדולה מדי. נשארו $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$. בכל מונום יש σ_1 או σ_3 כי החזקה אי-זוגית. אבל בהינתן $\sigma_1=0$ נשאר קשר ליניארי בין $a^3+b^3+c^3+d^3$ ל-σ_3.
לכן, התשובה מוגדרת ביחידות, כל עוד המחנה לא מתאפס והתשובה קיימת.

תשובה. $\frac{1}{3}$ או לא מוגדר (כלומר $\frac{0}{0}$).
פתרון ראשון. נשים לב כי

$$\sigma_1^3=\left(a^3+b^3+...\right)+3\left(a^2b+b^2a+a^2c+...\right)+6\left(abc+abd+...\right)$$
$$\sigma_1\sigma_2=\left(a^2b+b^2a+a^2c+...\right)+3\left(abc+abd+...\right)$$

לכן $\sigma_1^3-3\sigma_1\cdot\sigma_2=\left(a^3+b^3+...\right)-3\left(abc+abd+...\right)$. לכן אם $\sigma_1=3$ אז $\left(a^3+b^3+...\right)-3\left(abc+abd+...\right)=0$ ולכן $\frac{1}{3}=\frac{abc+abd+...}{a^3+b^3+...}$ אם מותר לחלק.
קל לראות ש $a^3+b^3+c^3+d^3$ יכול להיות גם שווה וגם שונה מ-0, לכן שתי התשובות יכולות להופיע.

פתרון שני. לפי זהות של ניוטון, $s_3-s_2\sigma_1+s_1\sigma_2-3\sigma_3=0$.
לכן תחת הנחה $s_1=\sigma_1=0$ מתקבל $s_3=3\sigma_3$.

3. נתון פולינום $p(x)$ עם מקדמים ממשיים מדרגה כלשהי, שיש לו $k>0$ מונומים. הוכח\י של-p יש פחות מ-k שורשים חיוביים.

פתרון. ההוכחה באינדוקציה. עם יש מונום בודד, אין שורשים חיוביים.
צעד אינדוקציה: נניח שיש k מונומים, מתוכם הדרגה הנמוכה x^ℓ. נחלק ב-x^ℓ, עדיין יש אותם שורשים ממשיים. נגזור. כרגע יש פחות מ-k מונומים, לכן יש לכל היותר $k-2$ שורשים חיוביים לפי הנחת האינדוקציה. אבל לפולינום החדש יש שורש בין כל שני שורשים העוקבים של הפולינום הקודם, לפי משפט רול. לכן לפולינום הקודם היו לכל היותר $k-1$ שורשים.

4. בנה\י פולינום $p(x)$ מדרגה 5 בעל מדמים שלמים, שהוא אי-פריק מעל $\mathbb{Z}$ ויש לו בדיוק 3 שורשים ממשיים.

פתרון. למשל: $p(x)=x^5-300x+3$. המקדם המוביל לא מתחלק ב-3; המקדמים האחרים כן, והמקדם האחרון לא מתחלק ב-9. לכן לפי קריטריון אייזנשטיין, הוא אי-פריק.
[לאלה שלא זוכרים איך להוכיח את קריטריון אייזנשטיין: להסתכל על הפירוק של פולינום זה לגורמים מודולו 3.]
כמה שורשים ממשיים לפולינום זה? ברור כי $p(1)<0$, $p(-1)>0$, $p(1000)>0$, $p(-1000)<0$ ולכן לפי רציפות יש שורש בכל אחד מבין התחומים $(1,1000)$, $(-1,1)$, $(-1000,-1)$. לכן יש לפחות 3 שורשים ממשיים לפולינום זה.
לפולינום $p''(x)=20x^3$ יש שורש ממשי בודד. לכן לפולינום $p'(x)$ יכולים להיות רק שני שורשים, הרי בין כל שני שורשים של פולינום יש שורש של נגזרת לפי משפט רול, ומאותה סיבה לפולינום $p(x)$ יש 3 שורשים ממשיים לכל היותר.

5. פרק\י את הפולינומים הבאים לגורמים, שהם פולינומים בעלי מקדמים שלמים אי-פריקים מעל מספרים שלמים (כלומר שאי-אפשר לפרק אף גורם למכפלה של פולינומים בעלי מקדמים שלמים; יש לוודא שכל גורם במכפלה שלך אי-פריק):

א. x^4+x^2+1.
ב. $3x^4+12x^3+19x^2+12x+3$.
ג. $x^4+4x^2+24x+91$.
ד. $x^4+4x^3+13x^2+16x+21$.
ה. x^7+x^2+1.

הערה. לפי הלמה של גאוס, אם יש פירוק לגורמים רציונאליים אז יש פירוק גם לגורמים שלמים.

פתרון. א. אפשר לנחש כאן תבנית של a^2-b^2 וכך לפרק לגורמים

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$$

דרך אחרת לנחש את הפירוק הזה זה לחשוב על השורשים. לפולינום x^2+x+1 יש שני שורשים מרוכבים $\omega,\bar{\omega}$, בעלי אורך 1 בזוויות של $\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi$. אבל קל לראות כי הם גם שורשים של x^4+x^2+1. לכן x^4+x^2+1 מתחלק ב-x^2+x+1, ומחלוקה מוצאים את הגורם השני.

ב. דרך אחת (שלא נלך בה) זה לפתור את המשוואה, ואז לראות אם יצא שורש רציונלי, או אם יש דרך לחלק את השורשים לזוגות על מנת ליצור מקדמים ריבועים רציונאליים.
שיטה כללית לפתור משוואות מסוג (כלומר משוואות פלינדרומיות, שמהסוף להתחלה ומהתחלה לסוף המקדמים הם אותו דבר) היא כזאת. מחלקים ב-x^2

$$3x^2+12x+19+12x^{-1}+3x^{-2}=0$$

ממציאים משתנה חדש $w=x+x^{-1}$, ואז $w^2=x^2+2+x^{-2}$

$$3w^2+12w+13=0$$

כך מקבלים משוואה ריבועית על w, שאותה ניתן לפתור, ולכל ערך של w מקבלים משוואה ריבועית על x.

באופן כללי, כל משוואה פולינומיאלית שהיא פלינדרום ממעלה $2n$ אפשר בשיטה כזאת להפוך למשוואה פולינומיאלית ממעלה n ב-w, ולכל ערך של w יתאימו שני ערכי x, x_1 ו-$1/x_1$.

גם בלי הצבה זו קל להבין, שאם v הוא שורש של פולינום $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, אז $1/v$ הוא שורש של פולינום $ex^4+dx^3+cx^2+bx+a$.

אילו לפולינום שלנו היו שורשים רציונאליים, אז המונה והמחנה היו מחלקים של 3, וזה משאיר 6 אפשרויות: $\pm1,\pm3,\pm\frac{1}{3}$ שכולן לא יתנו אפס בהצבה. הרי התתוצאה של הצבה תצא אי-זוגית (לאחר כפל במכנה).

לכן אם יש פירוק, אז הוא מכפלה של שני גורמים ריבועים.

$$3x^4+12x^3+19x^2+12x+3=\left(ax^2+bx+c\right)\left(kx^2+mx+n\right)$$

אנחנו לא נחפש שורשים, אלה נחפש את הפירוק באמצעות **שיטת המקדמים הלא מוגדרים**. זה כאשר רושמים את הביטוי שיוצא, פותחים סוגריים, ומנסים למצוא את המקדמים.

מכיוון שלכל שורש v יש שורש $1/v$, לכן או ששני הגורמים פלינדרומים, או ששני הגורמים הפוכים:

$$3x^4+12x^3+19x^2+12x+3=\left(ax^2+bx+a\right)\left(kx^2+mx+k\right)$$

או

$$3x^4+12x^3+19x^2+12x+3=\varepsilon\left(ax^2+bx+c\right)\left(cx^2+bx+a\right)$$

במקרה הראשון ניתן להניח כי $a=1,\ k=3$ ואז

$$3x^4+12x^3+19x^2+12x+3=\left(x^2+bx+1\right)\left(3x^2+mx+3\right)=$$

$$=3x^4+\left(m+3b\right)x^3+\left(mb+6\right)x^2+\left(m+3b\right)x+3$$

במקרה זה מהמקדם של x^2 מקבלים $mb=13$ וזה משאיר 4 אפשרויות בלבד, שאף אחת מהן לא תקיים $m+3b=12$, כי m לא מתחלק ב-3.

במקרה האחר $3x^4+12x^3+19x^2+12x+3=\varepsilon\left(ax^2+bx+c\right)\left(cx^2+bx+a\right)$ אז $\varepsilon=\pm1$, הרי אחרת היה מחלק משותף לכל מקדמי הפולינום, ואז $\varepsilon ac=3$, כלומר לה"כ $a=3,\ c=\varepsilon$. ובכן

$$3x^4+12x^3+19x^2+12x+3=\pm\left(3x^2+bx\pm1\right)\left(\pm x^2+bx+3\right)$$

כאשר הסימנים נבחרו בצורה תואמת. נפתח סוגריים:

$$3x^4+12x^3+19x^2+12x+3=$$

$$=2x^4+\left(b\pm3b\right)x^3\pm\left(10+b^2\right)x^2+\left(b\pm3b\right)x+3$$

המקדם של x^2 גם מכריע בסוגיית הסימן (חיובי) וגם אומר כי $b^2=9$ לכן $b=\pm3$.

לכן מהמקדם של x (או x^3, אותו דבר) נקבל $4b=12$ וזה נותן $b=3$, ומתאים גם לכל המקדמים. לכן יש פירוק:

$$3x^4+12x^3+19x^2+12x+3=\left(x^2+3x+3\right)\left(3x^2+3x+1\right).$$

ג. אם לפולינום $x^4+4x^2+24x+91$ היה שורש רציונאלי, הוא היה מחלק של 91, כלומר $\pm1,\pm7,\pm13,\pm91$. כולם לא מתאימים (המונום היחיד שיכול להיות שלילי הוא $24x$, אבל תמיד יש מונום יותר גדול בערכו המוחלט.

ניתן לנחש כאן תבנית של A^2-B^2. אכן

$$x^4+4x^2+24x+91=x^4+20x^2+100-16x^2+24x-9=$$
$$=\left(x^2+10\right)^2-\left(4x-3\right)^2=\left(x^2-4x+13\right)\left(x^2+4x+7\right)$$

ניתן גם להשתמש בשיטת המקדמים הלא מוגדרים, ולרשום

$$x^4+4x^2+24x+91=\left(ax^2+bx+c\right)\left(kx^2+mx+n\right)=$$
$$=\left(x^2+bx+c\right)\left(x^2+mx+n\right)=\left(x^2+bx+c\right)\left(x^2-bx+n\right)$$

נוצרות משוואות, שצריך לפתור בשלמים:

$$4=c+n-b^2\ ,\ 24=b\left(n-c\right)\ ,\ 91=cn$$

למשוואה $cn=91$ יש מספר קטן של פתרונות בשלמים, לכל פתרון b מוגדר ביחידות מהמשוואה $24=b\left(n-c\right)$, ואם גם b יוצא שלם אז בודקים את $4=c+n-b^2$, וכך אפשר גם להגיע לפירוק (אם לא מצליחים לנחש את התבנית של הפרש ריבועים).

ד. בפולינום הקודם לא היה x^3, וזה פישט את החישובים.
לפולינום $p\left(x\right)=x^4+4x^3+13x^2+16x+21$ יש את כל המקדמים, וזה יגרום לסבל אם ננקוט באותן שיטות. לכן נבצע הזזה: ננסה לרשום $y=x+1$, ואז $p\left(x\right)=q\left(y\right)$.

$$p\left(x\right)=x^4+4x^3+13x^2+16x+21=$$
$$=\left(x+1\right)^4+7x^2+12x+20=$$
$$=\left(x+1\right)^4+7\left(x+1\right)^2-2x+13=y^4+7y^2-2y+15=q\left(y\right)$$

אין ספק שיותר קל לעבוד עם q. אבל אם נמצא פירוק $q\left(y\right)=q_1\left(y\right)q_2\left(y\right)$, אז נקבל במיידית גם את הפירוק $p\left(x\right)=q_1\left(x+1\right)\cdot q_2\left(x+1\right)$.
אין שורש רציונאלי ל-q; אילו היה, אז הוא היה אחד מבין $\pm1,\pm3,\pm5,\pm15$ אבל אם מציבים כל אחד מהם, מקבלים מספר אי-זוגי. לכן צריכה להיות מכפלת שני ריבועים.

ניתן לנחש את התבנית של הפרש ריבועים

$$y^4+7y^2-2y+15=y^4+8y^2+16-\left(y^2+2y+1\right)=$$
$$=\left(y^2+4\right)^2-\left(y+1\right)^2=\left(y^2-y+3\right)\left(y^2+y+5\right)$$
ניתן כמובן גם למצוא את זה בשיטת המקדמים הלא מוגדרים. לכן
$$p\left(x\right)=\left(y^2-y+3\right)\left(y^2+y+5\right)=$$
$$=\left(\left(x+1\right)^2-\left(x+1\right)+3\right)\left(\left(x+1\right)^2+\left(x+1\right)+5\right)=$$
$$=\left(x^2+x+3\right)\left(x^2+3x+7\right)$$
לא מזיק לבדוק: לפתוח סוגריים ולראות שזה מה שיוצא (תרגיל לקורא).

ה. כמו שהזכרנו בסעיף א', לפולינום $x^2+x+1=\frac{x^3-1}{x-1}$ יש שני שורשים מרוכבים המקיימים $\omega^3=1$, $\omega,\ \omega^2$. $\omega^2+\omega+1$.
קל לנחש כי הם גם שורשים של x^7+x^2+1. לכן הפולינום x^7+x^2+1 מתחלק ב- x^2+x+1. לכן $x^7+x^2+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^2-x+1\right)$.

את זה $x^5-x^4+x^2-x+1$ אפשר לנסות לפרק רק בשתי דרכים: דרגות 4+1 או דרגות 3+2. הדרך הראשונה זה למצוא שורש רציונאלי. במקרה זה שורש רציונלי עלול להיות רק ±1, וזה לא מתאים בכל מקרה, למשל בגלל זוגיות.
דרגות 3+2: לה"כ מקדם מוביל הוא 1 בשני הפולינומים, מקדם אחרון הוא ±1 (הסימנים תואמים). כלומר $x^5-x^4+x^2-x+1=\left(x^2+ax\pm1\right)\left(x^3+bx^2+cx\pm1\right)$.
$$x^5-x^4+x^2-x+1=\left(x^2+ax\pm1\right)\left(x^3+bx^2+cx\pm1\right)=$$
$$=x^5+\left(a+b\right)x^4+\left(\pm1+ab+c\right)x^3+\left(\pm1+ac\pm b\right)x^2\pm\left(a+c\right)x+1$$
מכאן 4 תנאים:
$$-1=a+b$$
$$0=\pm1+ab+c$$
$$1=\pm1+ac\pm b$$
$$-1=\pm\left(a+c\right)$$
מהתנאי הראשון והאחרון, ניתן לבטא כל מקדם אחר דרך a
$$b=-1-a$$
$$c=\mp1-a$$
כעת נציב בשני התנאים האחרים:
$$0=\pm1-a\left(a+1\right)\mp1-a$$
$$1=\pm1-a\left(a\pm1\right)\mp\left(1+a\right)$$
נחסיר את מהמשוואה האחרונה את הקודמת, ונקבל $1=a\mp a+a\mp a$
אגף שמאלי אי-זוגי, ימני זוגי. זה לא יתכן. לכן הפולינום אי-פריק.

6. חשב\י את $\left(\cot 1^\circ\right)^2+\left(\cot 2^\circ\right)^2+\left(\cot 3^\circ\right)^2+\ldots+\left(\cot 89^\circ\right)^2$.

פתרון. מסתבר כי $\frac{\sin(180x)}{\sin x}$ הוא פולינום מדרגה 179 ב-$\cos x$. ניתן לראות את זה למשל כאשר פותחים סוגריים בביטוי $(c+is)^{180}$, כאשר $s=\sin x$, $c=\cos x$. אז החלק המדומה הוא $\sum_{k=0}^{89}\binom{180}{2k+1}c^{179-2k}s^{2k+1}(-1)^k$, וזה בעצם $\sin(180x)$. אם נחלק ב-s, יישארו חזקות זוגיות של c. אם נחליף את s^2 ב-$1-c^2$ נקבל את הפולינום

$$\sum_{k=0}^{89}\binom{180}{2k+1}c^{179-2k}\cdot\left(c^2-1\right)^k.$$

השורשים של הפולינום הזה הם $\cos1^\circ,\cos2^\circ,\ldots,\cos179^\circ$ (אלה מספרים שונים, לכן אם הם שורשים, אז אלה כל השורשים). אם נחלק ב-c אז השורש $\cos90^\circ=0$ יעלם, ויישארו השורשים $\pm\cos1^\circ,\pm\cos2^\circ,\ldots,\pm\cos89^\circ$. לכן

$$\sum_{k=0}^{89}\binom{180}{2k+1}c^{178-2k}\cdot\left(c^2-1\right)^k=A\prod_{k=1}^{89}\left(c-\cos k^\circ\right)\left(c+\cos k^\circ\right)=A\prod_{k=1}^{89}\left(c^2-\cos^2 k^\circ\right)$$

כעת נסמן $c^2=z$ ונקבל

$$\sum_{k=0}^{89}\binom{180}{2k+1}\cdot z^{89-k}\cdot\left(z-1\right)^k=A\prod_{k=1}^{89}\left(z-\cos^2 k^\circ\right).$$

למה כל זה קשור? רצינו לחשב $\left(\cot 1^\circ\right)^2+\left(\cot 2^\circ\right)^2+\left(\cot 3^\circ\right)^2+\ldots+\left(\cot 89^\circ\right)^2$.
או באופן שקול (הרי $\cot x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$) אפשר לחשב.

$$\left(\tan 1^\circ\right)^2+\left(\tan 2^\circ\right)^2+\left(\tan 3^\circ\right)^2+\ldots+\left(\tan 89^\circ\right)^2=\sum_{k=1}^{89}\left(\frac{1}{\cos^2 k^\circ}-1\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{89}\frac{1}{\cos^2 k^\circ}-89=\frac{\sum_{i=1}^{89}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{89}\cos^2 k^\circ}{\prod_{k=1}^{89}\cos^2 k^\circ}-89$$

זה יחס של פולינומי וייטא ב-$\cos^2 1^\circ,\cos^2 2^\circ,\ldots,\cos^2 89^\circ$. הביטוי במכנה הוא היחס בין מינוס המקדם החופשי למוביל, והמכנה הוא היחס בין המקדם החופשי למוביל בפולינום $\sum_{k=0}^{89}z^{89-k}\cdot\left(z-1\right)^k$. המקדם המוביל מתקזז, לכן נשאר מינוס היחס בין המקדמים הליניארי והחופשי. מה שטוב, שהמקדם החופשי מופיע רק במחובר $\binom{180}{1}\cdot\left(z-1\right)^{89}$,

והליניארי רק בשני מחוברים $\binom{180}{3}z(z-1)^{88}+\binom{180}{1}\cdot(z-1)^{89}$. לכן המקדם החופשי הוא -180, והמקדם הליניארי הוא

$$180\cdot 89+\frac{180\cdot 179\cdot 178}{6}=\frac{3\cdot 180\cdot 89+180\cdot 179\cdot 89}{3}=$$

$$=60\cdot 89\cdot(3+179)=60\cdot 89\cdot 182$$

לכן היחס הוא $\frac{60\cdot 89\cdot 182}{180}=\frac{89\cdot 182}{3}$, ולכן התשובה היא

$$\left(\tan 1^\circ\right)^2+\left(\tan 2^\circ\right)^2+\left(\tan 3^\circ\right)^2+...+\left(\tan 89^\circ\right)^2=\sum_{k=1}^{89}\frac{1}{\cos^2 k^\circ}-89=$$

$$=\frac{89\cdot 182}{3}-89=\frac{89\cdot 179}{3}$$

אם לא טעינו בחשבון. כמובן שבדיוק באותה שיטה אפשר לפתח נוסחה כללית (כאשר מחלקים את המעגל ל-n חלקים במקום 180°).

הערה. בעיקרון, גם $\cos(nx)$ וגם $\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$ הם פולינומים ממעלה n ב-$\cos x$. פולינומים אלה נקראים פולינומי צ'ביישוב; יש להם הרבה תכונות יפות. בפרט המקדמים שלהם מספרים שלמים, וזה מאפשר להוכיח זהויות טריגונומטריות שונות.