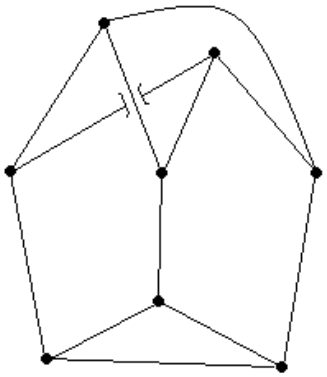
<u>תרגיל 1 – גרפים</u>

1. הוכיחו שלכל עץ יש לפחות שני עלים (כאשר עץ זה גרף ללא מעגלים, ועלה זה קודקוד שהדרגה שלו 1). הוכיחו שאם יש בדיוק שני עלים, אז כל הקודקודים האחרים הם מדרגה 2.

פתרון ראשון. נשלח שליח, שעובר מקודקוד מקדקוד לקדקוד לפי קשתות, אבל אף פעם לא עושה מהלך הפוך למהלך הקודם. השליח לא יכול לעשות מעגל (הרי הגרף הוא עץ). לכן הוא יתקע לפני שהוא יעבור על כל הקודקודים. ברור שהוא יתקע בעלה.
נשלח שליח נוסף מהנקודה שבה השליח הראשון נתקע. הוא יתקע בקודקוד אחר (הוא לא יכול לחזור לאותו קדקוד, כי אין מעגלים).
נניח שיש קדקוד עם דרגה 3 או יותר. נשלח מהקדקוד 3 שליחים בכיוונים שונים. השליחים לא יפגשו (כי אז נוצר מעגל) ולא יחזרו לאף קדקוד פעם נוספת (כי גם אז יש מעגל). לכן הם יתקעו ב-3 עלים שונים. לכן יש לפחות 3 מעגלים.

פתרון שני. נניח שיש a עלים, ו- V קודקודים. בעץ כידוע יש $V-1$ קשתות. נספור את הקשרים בין קשת לקצה שלו בשני דרכים. מצד אחד זה פעמיים כמות הקשתות, $2V-2$. מצד שני זה סכום הדרגות של כל הקדקודים. זה נותן 1 לכל עלה ולפחות 2 לכל קודקוד שאינו עלה, לכן $2V-2 \geq 2(V-a)+a$, והשוויון מתקיים כאשר כל הדרגות של קודקודים שאינם עלים שוות 2. מצמצום והעברת אגפים מתקבל $a \geq 2$. כמו שראינו, אם השוויון מתקבל הדרגות של כל הקדקודים שאינם עלים שוות 2.

2. בממלכה 8 ערים. המלך רוצה להקים מערכת כבישים, כך שמכל עיר לכל עיר יהיה אפשר להגיע, כך שבדרך לא יהיה צריך לעבור ביותר מאשר עיר נוספת אחת, וכך שמכל עיר יצאו K כבישים לכל היותר. עבור אילו K זה יתכן?



תשובה: $K \geqslant 3$.

פתרון: אם K=2, אז מעיר הבירה אפשר להגיע רק לשני ערים ישירות, ומכל אחת משני הערים הללו אפשר להגיע ישירות לעיר הבירה או לעיר נוספת אחת. כלומר, מעיר הבירה אפשר להגיע באמצעות שני כבישים רק ל- 4 ערי שונות ולא ל- 7.
K =3 מספיק. נניח שיש שני ערים בצפון, 3 במרכז המדינה ו- 3 בדרום. אז נחבר בין כל שני ערים דרומיות, בין כל עיר דרומית לעיר אחת במרכז, ובין כל עיר בצפון לכל עיר במרכז. אנחנו משאירים לקוראים להבין למה מכל עיר אפר להגיע לכל עיר באמצעות כביש או שני כבישים.

3. חברת תעופה מקיימת מספר טיסות בין הערים במדינה מסוימת, ומכל עיר אפשר להגיע לכל עיר. בשנה הבאה החברה מתכוונת להוסיף עוד קו טיסה, ואז יהיה אפשר להגיע מכל

עיר לכל עיר אחרת ב-17 טיסות לכל היותר. מהו מספר מכסימלי של טיסות כרגע שמספיקות בשביל להגיע מכל עיר לכל עיר אחרת (במקרה הגרוע)?

תשובה. 34.
פתרון. על מנת להוכיח את זה, צריך למצוא דוגמה עם 34 ולהראות כי 35 לא אפשרי.
נתחיל מדוגמה: נניח שהגרף שלנו הוא שורה של 35 ערים, כאשר כל שני ערים סמוכות מחוברות. אז הדרך בין שני הקצוות מורכבת מ-34 טיסות. נניח שהקו הנוסף יחבר שני ערים בקצוות ההפוכים. אז המסלול הקצר בין כל שני ערים הוא באורך 17.

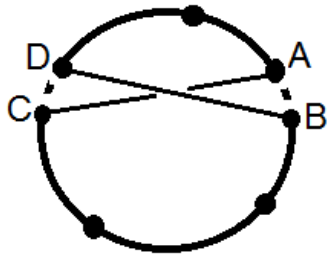
נוכיח כי 35 לא יכול להיות. נניח כי היו שני ערים A_1, A_{36} במרחק של 35 קשתות בגרף, והמסלול הקצר ביותר בגרף שמחבר אותם הוא $A_1A_2\ldots A_{36}$. ניתן להניח כי הקו החדש שמוסיפים הוא ST, ואז יופיע מסלול שמתחיל ב-A_1, מגיע ל-S ב-m קווים, עובר ל-T דרך הקו החדש ואז מגיע ל-A_{36} ב-n קווים, כאשר $m+n+1\le 17$.
זהו מסלול הקצר ביותר מ-A_1 ל-A_{36}. ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות כי $m\ge n$ (אחרת נחליף שמות לכל הערים A_i ונמספר אותם מהסוף להתחלה).
ברור ש-S יותר קרובה ל-A_1 מאשר T, אחרת מסלול באורך 17 היה קיים עוד לפני הכנסת קו חדש.
נתבונן במרחק בין העיר A_{19} לעיר A_1, לפני הוספת הקו ובעתיד. המרחק הוא 18, אחרת היה אפשר לקצר את המסלול בין A_1 ל- A_{36}.
מ-A_{19} אי-אפשר להגיע ל-S בפחות מ-$18-m$ מהלכים, אחרת המרחק בין A_{19} ל-A_1 היה פחות מ-18.
באופן דומה, מ-A_{19} אי-אפשר להגיע ל-A_{36} בפחות מ-17 מהלכים, ואי-אפשר להגיע ל-T בפחות מ-$17-n$ מהלכים.

בגל מקרה, נתבונן במסלול הקצר ביותר מ-A_{19} ל-A_1 לאחר הכנסת הקו החדש. אם זה מסלול שלא משתמש בקו ST, אורכו לפחות 18. אם זה מסלול שמגיע קודם ל-S, ואחר כך ל-T אז אין טעם להשתמש בקו ST – הרי S יותר קרובה ל-A_1, לכן גם זה לא יתכן. אם זה מסלול שמגיע קודם ל-T (וזה לוקח $17-n$ מהלכים לפחות) ואז משתמש בקו TS (פלוס 1) ואז מגיע מ-S ל-A_1 (עוד m קווים), סה"כ לפחות $18+m-n$ קווים, כלומר לפחות 18. לכן גם שיוסיפו את הקו הנוסף, לא יהיה אפשרי להגיע מכל עיר לכל עיר ב-17 טיסות.

4. נתונים 7 אנשים, שמבין $\binom{7}{2}$ זוגות שהם יוצרים יש N זוגות של חברים. עבור ערך קטן ביותר של N ניתן לטעון, שאפשר להושיב את 7 האנשים מסביב לשולחן עגול, כך שליד כל אחד ישבו חברים שלו?

פתרון. קל לראות כי $\binom{7}{2}=\frac{7\cdot 6}{2}=21$.
לא קשה לבנות דוגמאות של גרפים עם $21-5=16$ קשתות שעבורם אין דרך להושיב את האורכים. דוגמה אחת היא כאשר לאחד מהאנשים יש רק חבר אחד. לא נוכל להושיב אותו בשום דרך, כי יש דרישה שמכל צד שלו ישב חבר.

נניח שיש $17=21-4$ זוגות חברים. נושיב אותם בסדר אקראי. נניח שיש שניים צמודים A ו-B שאינם חברים. ננסה לשפר את המצב.



בשביל זה ננסה למצוא זוג שכנים אחר, C ו-D, כך A, B, C, D ממוקמים על מעגל בסדר זה (יכולים להיות עוד אנשים על קשת AD ועל קשת BC), כך ש-A חבר של C ו-B חבר של D. אפ נצליח, אז אנחנו נבקש מכל הקשת AD כולל A ו-D לקום ולשבת בכיוון ההפוך. בצורה זאת, כל זוגות שכנים חוץ מהזוג B,A והזוג D,C יישארו אותו דבר, והזוגות האלה יוחלפו בזוגות של חברים: הזוג A, C והזוג B, D. אחת מהזוגות שהרסנו לא היה זוג של חברים, לכן כמות של זוגות חברים מבין זוגות שכנים יעלה. לכן אחרי 7 פעולות כאלה או פחות נקבל מש"ל.

אבל האם כל פעם נוכל לבצע פעולה מסוג זה?

A ו-B אינם חברים. לכן חוץ מהזוג A, B יש לכל היותר עוד 3 זוגות של אנשים שאינם חברים. יש 4 זוגות של שני אנשים ברצף שמועמדים להיות D,C. בשביל לפסול זוג D,C צריך שאחד מהזוגות A, C או B, D לא יהיה זוג של חברים. קל לראות שהזוגות לא חוזרות על עצמן, לכן אפשר לפסול רק 3 זוגות ועדיין יש זוג D ,C שמאפשר מהלך כזה.

הערה. החלק השני של ההוכחה הוא מקרה פרטי של טענה כללית וידוע.

הגדרה. מעגל המילטוני בגרף זה מסלול, שעובר על כל קודקוד פעם אחד בדיוק וחוזר לקודקוד המקורי.

טענה (קריטריון Ore). אם בגרף פשוט לכל שני קדקודים סכום הדרגות שלהם גדול או שווה לכמות הקדקודים, אז יש בו מעגל המילטוני.

ההוכחה די דומה לשיקול שהצגנו. דרך טובה לבדוק האם הצלחת להבין היא לנסח הוכחה לקריטריון Ore.

5. נתון גרף G שקבוצת הקשתות שלו V. הוכיחו שאפשר לפרק אותו ל-k יערות (במילים אחרות לצבוע אותו ב-k צבעים כך שאין מעגל באף צבע) אם ורק אם בכל תת-גרף שנוצר על תת-קבוצה של קודקודים $U\subset V$ יש לכל היותר $k\left(|U|-1\right)$ קשתות.

הערה. הטענה של השאלה היא משפט של Nash-Williams (שפורסם לראשונה ע"י Nash-Williams בשנות השישים). ההוכחה היחסית קצרה שנציג מאמר מ-1993 בשם A Short Proof of Nash-Williams Theorem for the Arboricity of Graphs של B. Chen, M. Matsumoto, J. Wang, Z. Zhang, J. Zhang.

פתרון. נסמן ב-E את קבוצת הקשתות, ב-V את קבוצת הקודקודים.

נשתמש בשיטת הקיצוני: ניקח דוגמה נגדית למשפט, שעבורה $|V|+|E|$ מינימלי.

נסמן ב-$\alpha(G)$ את כמות המינימאלית של יערות שיכולות לכסות את G.

בגלל שלקחנו דוגמה נגדית. בדוגמה זו $\alpha(G)>\left\lceil\frac{|E|}{|V|-1}\right\rceil$.

קל לראות כי G קשיר (אחרת היה לו רכיב קשירות שמפריך את המשפט).

אם נוריד קשת כלשהי, נקבל גרף שאינו דוגמה נגדית, לכן לכל $e\in \mathrm{E}$, מתקיים: $\alpha(\mathrm{G}-e)<\alpha(\mathrm{G})$. לגרף שמקיים את התכונה האחרונה (עם מורידים קשת כלשהי, לא משנה איזה, α יורד) נקרא גרף α-קריטי.

למה. יהא G גרף α-קריטי וקשיר עבורו $|\mathrm{V}|>1$. אז לכל $e\in \mathrm{E}$, בכל פירוק של הגרף ל-$\alpha(\mathrm{G})-1$ יערות, כל אחד מהיערות יהיה עץ פורס של הגרף.

הלמה ישר מובילה אותנו לסתירה ומסיימת את ההוכחה. אכן, כמות הקשתות ב-$\mathrm{G}-e$ ניתן לחשב בשתי דרכים: $|\mathrm{E}|-1=(|\mathrm{V}|-1)(\alpha(\mathrm{G})-1)$ ומכאן

$$\alpha(\mathrm{G})>\left\lceil\frac{|\mathrm{E}|}{|\mathrm{V}|-1}\right\rceil=\left\lceil\frac{(|\mathrm{V}|-1)(\alpha(\mathrm{G})-1)+1}{|\mathrm{V}|-1}\right\rceil=\left\lceil\alpha(\mathrm{G})-1+\frac{1}{|\mathrm{V}|-1}\right\rceil=\alpha(\mathrm{G}).$$

זו סתירה. נשאר להוכיח את הלמה.

הוכחת הלמה. נניח שטענת הלמה שגויה. אז בגרף α-קריטי וקשיר קיימת קשת $e\in \mathrm{E}$ ופירוק של $\mathrm{G}-e$ ליערות $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,...,\mathrm{E}_{\alpha-1}$ כאשר $\alpha=\alpha(\mathrm{G})$, כזה ש-$\mathrm{E}_1$ אינו עץ פורס. E_1+e אינו יער, לכן הוא מכיל מעגל. לכן שני הקצוות של e נמצאים באותו רכיב קשירות של E_1, שיסומן T. נסמן ב-K תת-גרף של G שנוצרי מקודקודי T וכל הקשתות של G שמחברים בינם.
היות ו-G קשיר, הקשתות של $\mathrm{E}-\mathrm{E}(K)$ זו קבוצה לא ריקה (כאן $\mathrm{E}(K)$ זו קבוצת השתות של K). לכן את $\mathrm{E}(K)$ ניתן לפרק ל-$\alpha-1$ יערות: $A_1,A_2,...,A_{\alpha-1}$.

נתבונן בקבוצה S שכל איבר בה הוא $(E'_1,...,E'_{\alpha-1},\{e'\})$ פירוק של G ל-α יערות, שמקיימים את התנאים הבאים:
א. היער האחרון $\{e'\}$ מורכב מקשת אחת e'.
ב. שני הקצוות של e' נמצאים ב-K.
ג. אחד מרכיבי קשירות של E'_1 הוא עץ פורס של K.

הקבוצה S אינה ריקה: היא מכילה למשל את $(E_1,...,E_{\alpha-1},\{e\})$.
ניקח $\bar{E}=(\bar{E}_1,...,\bar{E}_{\alpha-1},\{\bar{e}\})\in \mathrm{S}$ עבורו $J(\bar{E})=\sum_{i=1}^{\rho-1}|A_i\cap\bar{E}_i|$ יהיה הכי גדול.

$\bar{e}\in \mathrm{E}(K)$, ולכן עבור t מסוים $\bar{e}\in A_t$. ברור ש-$\bar{E}_t+\bar{e}$ חייב להכיל מעגל C.
אם $t=1$ אז C מוכל ב-K לפי ההנחה על E'_1.
במקרה ש-$t\neq 1$ והמעגל C לא מוכל ב-K, אז יש במעגל זה קשת f שקצה אחד שלה ב-K וקצה אחר לא ב-K. אז יש פירוק של הגרף המקורי ל-$\alpha-1$ יערות בניגוד להנחה:
$$(\bar{E}_1+f,\bar{E}_2,...,\bar{E}_t+\bar{e}-f,...,\bar{E}_{\alpha-1}).$$
וזה מוביל לסתירה. לכן ניתן להניח כי C מוכל ב-K בכל מקרה. מכיוון שגם A_t הוא חסר מעגלים, קיימת קשת $f\notin A_t$ שמוכלת ב-C. אז $(\bar{E}_1,\bar{E}_2,...,\bar{E}_t+\bar{e}-f,...,\bar{E}_{\alpha-1},\{f\})$ זה פירוק עם J יותר גדול, בסתירה להנחה.

6. נתון גרף מישורי פשוט לא מכוון. הוכיחו שאפשר לכוון את הקשתות, כך שמכל קודקוד יצאו לכל היותר 3 קשתות.

אנחנו נציג שני פתרונות, ששניהם ישתמשו בטענה.

טענה. תהי V כמות הקודקודים, E כמות הקשתות בגרף מישורי פשוט. אזי $E < 3V$.

הוכחת הטענה. מספיק להוכיח את הטענה לכל רכיב קשירות בנפרד. עבור רכיב קשירות מתקיימת נוסחת אוילר: $V - E + F = 2$. לכל פאה יש לפחות 3 קשתות בגבולות שלה (חוץ מהמקרה שבו יש פחות מ-3 קודקודים בגרף, אבל במקרה זה אפשר לטפל בנפרד, אנחנו נשאיר את זה כתרגיל), ולכל קשת יש בדיוק שני פאות. לכן אם נספור בשני דרכים את הקשרים (פאה, קשת בגבול שלה) נקבל $2E \le 3F$. כלומר $E \le \frac{2}{3}F$.
לכן $V - \frac{1}{3}E = V - E + \frac{2}{3}E \ge V - E + F = 2$. כלומר $V \ge 2 + \frac{1}{3}E > \frac{1}{3}E$. מש"ל.

כעת נציג שני פתרונות לשאלה 6.

פתרון ראשון. נכוון את כל הקשתות איכשהו. יתכן שיש קודקודים שמהם יוצאים יותר מ-3 קשתות. נקרא להם **קודקודים רעים**. אנחנו נקטין את כמות הקודקודים הרעים באופן הדרגתי, ונגיע למצב שבו אין קודקודים רעים.
אם עוד לא הגענו למצב זה, נבחר קודקוד A שממנו יוצאים יותר מ-3 קשתות מכוונות. נסמן את כל הקודקודים והקשתות שאליהם אפשר להגיע כאשר מתחילים את המסלול בנקודה A. אפשרות אחת היא שיש קודקוד מסומן B שממנו יוצאים פחות מ-3 קשתות. במקרה זה ניתן לבחור מסלול שמתחיל ב-A ומסתיים ב-B. אפשר להניח ללא הגבלת הכלליות שמסלול זה לא מבקר באף קודקוד פעמיים.
במקרה זה נחליף את הכיוונים של כל קשתות במסלול. כמות הקשתות היוצאות מכל קודקוד פרט ל-A ו-B לא תשתנה. כמות הקשתות שיוצאות מ-B לע תעלה על 3, לכן היא עדיין לא תהיה רעה. כמות הקשתות שיוצאות מ-A תקטן ב-1.
ובכן, כל פעם שנעשה פעולה כזאת, כמות הקשתות שיוצאות מנקודות רעות תרד ב-1, או שקודקוד רע יהפוך לטוב.
אם אין אפשרות לעשות מהלך כזה, אז מכל הנקודות המסומנות יוצאות לפחות 3 קשתות. לכן בגרף של קודקודים מסומנים וקשתות מסומנות $E \ge 3V$ בניגוד לטענה.

פתרון שני. משילוב של שאלה 5 והטענה, רואים כי אפשר לפרק את הגרף ל-3 יערות. כל יער אפשר לכוון, כך שמכל קודקוד תצא קשת אחת מכל היותר. מספיק לבדוק את זה לעץ. בעץ נבחר קודקוד ספציפי (נקרא לו שורש) ונכוון כל קשת לכיוון השורש.
אז לכל קודקוד בכל עץ יהיה רק קשת אחת שיוצאת ממנו.