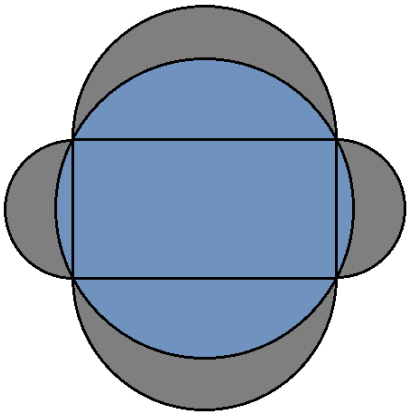
תרגיל 19

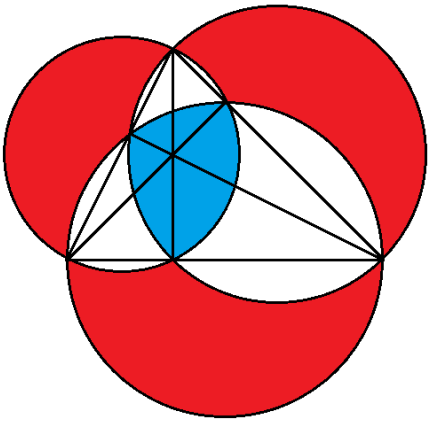
1. נתון מלבן P. נתבונן במקום גיאומטרי M של הנקודות, שרואות את P בזווית קהה, אבל בו-זמנית רואות את האלכסונים של P בזווית חדה. מצא\י את השטח של M באמצעות השטח של P. (זווית ראיה של צורה גיאומטרית מנקודה X זה גודל זוויתי של הזווית, שהיא איחוד הקרניים שמתחילות ב-X וחותכות את הצורה הגיאומטרית).



תשובה. שווה לשטח המלבן.
פתרון. קל לראות שהמקום הגיאומטרי של נקודות, שרואות קטע AB בזווית כהה זה החלק הפנימי של עיגול, שקוטרו AB.
אכן, אם נקודה X בתוך העיגול ולא על AB, נגדיר נקודה Y על המעגל כזאת ש-AX מכיל את Y. אז $\sphericalangle AXB < \sphericalangle AYB = 90^\circ$.
אם נקודה X מחוץ לעיגול ולא על המשך AB, אז נגדיר נקודה Y שהיא נקודה חיתוך של הקטע AX והמעגל, ואז $\sphericalangle AXB > \sphericalangle AYB = 90^\circ$.
במקרה של X על AB צריך לבדוק בנפרד: $\sphericalangle AXB$ הוא 0 כאשר X בחוץ, ו-180° כאשר X בפנים.
לכן נקודות שרואות את האלכסונים של המלבן בזווית קהה זה עיגול (פתוח) שחוסם את המלבן. נקודות שרואות את הצלעות בזוויות קהות זה עיגולים שקוטריהם הצלעות.
נניח שצלעות המלבן a,b, אלכסוניו d, ושטח S. אז אם נוסיף למקום הגיאומטרי שלנו את העיגול החוסם של המלבן, נקבל צורה שמורכבת מהמלבן המקורי ו-4 חצאי עיגול שקוטריהם של שניים a ושל שניים האחרים b. השטח של הכול ביחד הוא כמו שטח של מלבן ביחד עם שני עיגולים $S+\frac{\pi}{4}a^2+\frac{\pi}{4}b^2$. השטח של העיגול החוסם של המלבן שצריך להחסיר אותו הוא $\frac{\pi}{4}d^2$. לפי משפט פיתגורס $a^2+b^2-d^2$ לכן התשובה היא $S+\frac{\pi}{4}a^2+\frac{\pi}{4}b^2-\frac{\pi}{4}d^2=S$ כלומר שטח של M שווה לשטח של P.

2. נתון משולש הד-זוויות ABC. נסמן ב-M_1 את המקום הגיאומטרי של נקודות שרואות בדיוק אחת מבין הצלעות של ABC בזווית קהה. נסמן ב-M_3 את המקום הגיאומטרי של נקודות שרואות את כל שלושת הצלעות של ABC בזווית קהה. מצא\י את הפרש השטחים בין M_1 ל-M_3, באמצעות השטח של משולש ABC.

תשובה. פעמיים השטח של המשולש.
פתרון. כמו שראינו כבר בשאלה הקודמת, הצורות שיוצאות חסומות על ידי קשתות מעגליות. המעגלים שמעניינים אותנו זה מעגלים שקוטריהם הם צלעות המשולש. כל מעגל כזה עובר דרך שני עקבי הגבהים, כמו שרואים בתמונה.
נסמן גם ב-M_2 את התחום שמהם רואים בדיוק שתי צלעות בזוויות קהות, ואת שטחי בתחומים M_1, M_2, M_3 ב-S_1,S_2,S_3. כמו כן נסמן את שטח המשולש המקורי ב-S ואת ואת צלעותיו ב-a,b,c.



נתבונן בתחום T שהוא איחוד של כל העיגולים שיש בציור. התחום גם כולל את המשולש, ואפשר להגדיר אותו בתור קבוצה של נקודות, שרואות לפחות צלע אחת בזווית לא חדה. שטחו יסומן Σ.

נחשב את Σ ב-3 דרכים:

(א) T מורכב ממשולש ו-3 חצאי עיגולים, לכן
$$\Sigma = S + \tfrac{\pi}{8}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

(ב) T זה תחום של נקודות, שרואות 1, 2, או 3 צלעות בזווית חדה, לכן $\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$.

(ג) T מכוסה על ידי שלוש עיגולים שהשטח הכולל שלהם $\tfrac{\pi}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$. אבל יש שטחים שמכוסים פעמיים (התחום M_2) שצריך להחסיר, ויש את השטח שמכוסה 3 פעמים (התחום M_3) וצריך להחסיר את שטחו פעמיים. לכן
$$\Sigma = \tfrac{\pi}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) - S_2 - 2S_3.$$

כעת יש לנו שלוש ביטוים ל-Σ, אבל זה לא מה שביקשו: צריך לקשר בין $S_1 - S_3$ ל-S. על מנת לעשות את זה, צריך להיפתר משטחי העיגולים (כל הביטויים שקשורים לדברים כמו $\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)$. לכן נרשום, שהביטו שקיבלנו בשיטה א' פעמיים שווה לביטוי שקיבלנו בשיטה ב' + הביטוי שקיבלנו בשיטה ג'.

$$2S + \tfrac{\pi}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) = 2\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + \tfrac{\pi}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) - S_2 - 2S_3$$
$$2S = S_1 - S_3.$$

3. יהיו O_A, O_B, O_C מרכזי המעגלים החוסמים של המשולשים PBC, PAC, PAB.
בהינתן ש-O_A נמצאת על הישר PA ו-O_B נמצאת על הישר PB, הוכח\י כי O_C נמצאת על הישר PC.

פתרון. הישר PA מאונך לישר O_BO_C, הרי נקודות חיתוך של שני מעגלים סימטריות ביחס לקו המרכזים. בנוסף, PA מכיל את O_A, לכן הישר PA הוא גובה במשולש $O_AO_BO_C$. באופן דומה גם PB הוא גובה ב-$O_AO_BO_C$, ולכם P הוא נקודת מפגש הגבהים.
גם הישר PC מאונך ל-O_AO_B, והוא גם עובר דרך נקודת מפגש הגבהים P, לכן הוא גובה במשולש $O_AO_BO_C$, ועובר דרך O_C.

4. נקודות X, Y, Z הן שיקופים של נקודה P ביחס לצלעות BC, AC, AB בהתאמה של משולש ABC.

א. הוכח\י כי המעגלים החוסמים של המשולשים AYZ, XBZ, XYC, ABC נפגשים בנקודה אחת.

ב. הוכח\י כי המעגלים החוסמים של המשולשים ABZ, AYC, XBC, XYZ נפגשים בנקודה אחת. נקודה זאת תסומן Q.

ג. נסמן ב-K, J, I, O את מרכזי המעגלים החוסמים של ABZ, AYC, XBC, XYZ בהתאמה. הוכח\י כי $\frac{QI}{OI} = \frac{QJ}{OJ} = \frac{QK}{OK}$.

פתרון. נזכיר כי הזווית המכוונת $\sphericalangle(XY,ZT)$ זאת זווית הנחוצה על מנת לסובב את הישר XY כדי שנקבל ישר שמקביל ל-ZT. זווית מכוונת מוגדרת עד כדי תוספת של כפולה של 180 מעלות, ויש לה תכונות יותר יפות מאשר לזווית רגילה, שזה חוסך בדיקת מקרים בהרבה הוכחות. למשל, המקום הגיאומטרי של נקודות P המקיימות $\sphericalangle(AP,BP)=\sphericalangle(AC,BC)$ זהו מעגל ABC (לא כולל שתי נקודות A, B), ולו היינו לוקחים זווית רגילה היינו מקבלים שתי קשתות.

א. נשים לב כי $2\sphericalangle(CA,AB)=\sphericalangle(YA,AZ)$, הרי Z,Y סימטריות ל-P ביחס לישרים AC, AB.
באופן דומה גם $2\sphericalangle(AB,BC)=\sphericalangle(ZB,BX)$, $2\sphericalangle(BC,CA)=\sphericalangle(XC,CY)$.
לכן אם ניקח נקודת חיתול של המעגלים XBZ, AZY השונה מ-Z, נקבל נקודה T המקיימת:

$$2\sphericalangle(AB,BC)=\sphericalangle(ZT,TX)$$
$$2\sphericalangle(CA,AB)=\sphericalangle(YT,TZ)$$

ואז גם

$$2\sphericalangle(BC,CA)=\sphericalangle(XT,TY)$$

הרי סכום של 3 משוואות אחרונות הופך לזהות מיידית: מקבלים כפולה של 180° מעלות בשני האגפים. לכן גם המעגל XCY עובר דרך T.
גם עם שני מעגלים משיקים, ונקודה T מתלכדת אם נקודה Z, אם נחליף ישר TZ במשיק המשותף, המשוואות שרשמנו תהינה נכונות.

$$\sphericalangle(AT,TC)=\sphericalangle(AT,TY)+\sphericalangle(YT,TC)=\sphericalangle(AZ,ZY)+\sphericalangle(YX,XC)$$

כאן השתמשנו בעובדה, שהרביעיות ATZY, CTXY על מעגלים.
המשולש AZY שווה שוקיים, הרי $AZ=AP=AY$.
לכן $\sphericalangle(YA,AZ)+2\sphericalangle(AZ,ZY)$ זה $\pm 180^\circ$.
לכן $\sphericalangle(CA,AB)+\sphericalangle(AZ,ZY)=90^\circ$.
בדומה $\sphericalangle(BC,CA)+\sphericalangle(YX,XC)=90^\circ$. כלומר

$$\sphericalangle(AT,TC)=\sphericalangle(AZ,ZY)+\sphericalangle(YX,XC)=$$
$$=180^\circ-\sphericalangle(CA,AB)-\sphericalangle(BC,CA)=\sphericalangle(AB,BC)$$

לכן גם A, B, C, T על מעגל אחד. מש"ל.

ב. ניתן לעשות חשבון זוויות דומה לסעיף הקודם, אבל אפשר להפוך את הסעיפים האלה אחד לשני באמצעות אינברסיה שמרכזה ב-P. כידוע, עם עושים אינברסיה שמרכזה ב-P, שמעבירה נקודות U, V לנקודות U',V' בהתאמה, אז המשולש PUV דומה למשולש PV'U'.
אצלנו, המשולשים PAY, PAZ, PBY, PBX, PCY, PCX הם שווי שוקיים, כלומר

$$AP=AY=AZ \quad , \quad BP=BX=BZ \quad , \quad CP=CX=CY$$

בעצם, בצורה כזאת אפשר להגדיר את המצב שלנו, אם מוסיפים שנקודה P שונה מנקודות X , Y , Z. אם נעשה אינברסיה שמרכזה ב-P, אז הנקודות A,B,C,X,Y,Z יעברו לנקודות A',B',C',X',Y',Z' כאשר המשולשים 'PA'Y ,'PA'Z ,'PB'Y ,'PB'X ,'PC'Y ,'PC'X הם שווי שוקיים עם קודקודי ראש ב-'X,'Y,'Z. הרי הם דומים באופן הפוך לשישה משולשים שווי שוקיים שהיו קודם. לכן המצב לאחר אינברסיה מקיים את התכונות של המצב לפני אינברסיה, רק שהפעם נקודות 'X,'Y,'Z מקבלות את התפקיד של ABC, ונקודות 'A,'B,'C מקבלות את התפקיד של X,Y,Z. לכן לפי סעיף א' המעגלים ABZ, AYC, XBC, XYZ נפגשים בנקודה אחת אחרי אינברסיה, ולכן גם לפני אינברסיה (הרי אינברסיה מכבדת מעגלים).

ג. מכיוון ש-QX הוא המיתר המשותף של מעגלים שמרכזיהם O, I אז $OI \perp QX$. באופן דומה, $QY \perp OJ$ וגם $QC \perp IJ$. לכן צלעותיהם של זוויות OIJ, XQC שוות, ואז הזוויות שוות או משלימות ל-180°, וגם בכל מקרה $\sin(XQC)=\sin(OIJ)$. באופן דומה גם $\sin(YQC)=\sin(OIJ)$. לכן $\frac{OI}{OJ}=\frac{\sin OJI}{\sin OIJ}=\frac{\sin YQC}{\sin XQC}$. מצד שני,

$$\frac{QI}{QJ}=\frac{\sin QJI}{\sin QIJ}\underset{(1)}{=}\frac{\sin\frac{1}{2}QJC}{\sin\frac{1}{2}QIC}\underset{(2)}{=}\frac{\sin QYC}{\sin QXC}.$$

(המעבר (1) מתקבל כי IJ מאונך ל-QC, ומשולש QJC שווה שוקיים, הרי Q, C נמצאים על מעגל שמרכזו J, באופן דומה במכנה. המעבר (2) מתקבל כי זווית היקפית היא מחצית הזווית המרכזית במעגל שמרכזו J.) נחלק את שתי הזהויות האחרונות:

$$\frac{OI}{OJ}\Big/\frac{QI}{QJ}=\frac{\sin YQC/\sin QYC}{\sin XQC/\sin QXC}=\frac{YC/QC}{XC/QC}=\frac{YC}{XC}=\frac{PC}{PC}=1.$$

מש"ל.

5. הוכח\י כי לכל 6 נקודות A,B,C,D,E,F במישור, מתקיים אי-שוויון

$$AD\cdot BE\cdot CF\le AB\cdot CF\cdot DE+AB\cdot CD\cdot EF+$$
$$+BC\cdot AD\cdot EF+BC\cdot DE\cdot FA+CD\cdot BE\cdot FA$$

מתי מתקיים השוויון?

פתרון. לפי משפט תלמי בצורת אי-שוויון

$$AD\cdot BE\cdot CF\le\big(AB\cdot DE+AE\cdot BD\big)\cdot CF=AB\cdot DE\cdot CF+AE\cdot BD\cdot CF\le$$
$$\le AB\cdot DE\cdot CF+AE\cdot\big(BC\cdot DF+BF\cdot CD\big)\le$$
$$\le AB\cdot DE\cdot CF+BC\cdot\big(AD\cdot EF+AF\cdot DE\big)+CD\cdot\big(AB\cdot EF+AF\cdot BE\big)$$

מש"ל.

המרובעים שהשתמשנו בהם היו $ABDE,BCDF,ADEF,ABEF$. לכן על מנת שיתקיים השוויון צריך שכל 6 הנקודות יהיו על מעגל מוכלל אחד (כלומר על מעגל או ישר); הרי על מעגל ADE צריך להיות גם B וגם F, לכן זה גם המעגל BDF, ועליו צריך להימצא גם C, והסדר המעגלי של הנקודות בכיוון מסוים צריך להיות A,B,C,D,E,F.