תרגיל 19

1. נתון מלבן P. נתבונן במקום גיאומטרי M של הנקודות, שרואות את P בזווית קהה, אבל בו-זמנית רואות את האלכסונים של P בזווית חדה. מצא\י את השטח של M באמצעות השטח של P. (זווית ראיה של צורה גיאומטרית מנקודה X זה גודל זוויתי של הזווית, שהיא איחוד הקרניים שמתחילות ב-X וחותכות את הצורה הגיאומטרית).

2. נתון משולש הד-זוויות ABC. נסמן ב-M_1 את המקום הגיאומטרי של נקודות שרואות בדיוק אחת מבין הצלעות של ABC בזווית קהה. נסמן ב-M_3 את המקום הגיאומטרי של נקודות שרואות את כל שלושת הצלעות של ABC בזווית קהה. מצא\י את הפרש השטחים בין M_1 ל-M_3, באמצעות השטח של משולש ABC.

3. יהיו O_A, O_B, O_C מרכזי המעגלים החוסמים של המשולשים PAB, PAC, PBC. בהינתן ש-O_A נמצאת על הישר PA ו-O_B נמצאת על הישר PB, הוכח\י כי O_C נמצאת על הישר PC.

4. נקודות X, Y, Z הן שיקופים של נקודה P ביחס לצלעות BC, AC, AB בהתאמה של משולש ABC.

א. הוכח\י כי המעגלים החוסמים של המשולשים AYZ, XBZ, XYC, ABC נפגשים בנקודה אחת.

ב. הוכח\י כי המעגלים החוסמים של המשולשים ABZ, AYC, XBC, XYZ נפגשים בנקודה אחת. נקודה זאת תסומן Q.

ג. נסמן ב-K, J, I, O את מרכזי המעגלים החוסמים של ABZ, AYC, XBC, XYZ בהתאמה. הוכח\י כי $\frac{QI}{OI}=\frac{QJ}{OJ}=\frac{QK}{OK}$.

5. הוכח\י כי לכל 6 נקודות A,B,C,D,E,F במישור, מתקיים אי-שוויון

$$AD\cdot BE\cdot CF\le AB\cdot CF\cdot DE+AB\cdot CD\cdot EF+$$
$$+BC\cdot AD\cdot EF+BC\cdot DE\cdot FA+CD\cdot BE\cdot FA$$

מתי מתקיים השוויון?