תרגיל 18

1. בתחילת המשחק רשומים 1000 מספרים טבעיים כלשהם בשורה. בכל מהלך רושמים מתחת לשורה אחרונה שורה נוספת, לפי הכלל הבא: אם מספר A מופיע בשורה האחרונה N פעמים, אז מתחת למספר A יהיה רשום N. המשחק מסתיים כאשר השורה האחרונה שנרשמה זהה לשורה הקודמת.
א. הוכח\י כי לאחר מספר סופי של מהלכים המשחק חייב להסתיים.
ב. מצא\י את המספר המינימלי K, עבורו אפשר להוכיח שהמשחק יסתיים תוך K מהלכים לכל היותר, אבל קיימת דוגמה של שורה התחלתית עבורה המשחק לא יסתיים בפחות מ-K מהלכים.

תשובה. המשחק יסתיים תוך 11 מהלכים.
פתרון. נגיד שמקומות בשורה שייכים ל**גוש** אחד, אם רשום בהם אותו מספר. לפי הגדרת המשחק, אם מקומות היו שייכים לאותו גוש בשורה הקודמת, אז הם שייכים לאותו גוש בשורה הבאה. לכן כמות הגושים יכולה רק לרדת. אם כמות הגושים לא ירדה שני מהלכים ברצף, זאת אומרת שכבר 3 תורות יש אותם גושים, לכן בכל מקום יהיו רשומים אותם מספרים שהיו רשומים שם קודם בשני מהלכים האחרונים. לכן במקרה זה משחק הסתיים. לכן כל עוד המשחק לא הסתיים, כל שני מהלכים כמות הגושים צריכה לרדת. לכן תוך פחות מ-2000 צעדים המשחק חייב להסתיים. זה פותר את סעיף א'.

נגיד שיש שורה כזאת: במקום אחד רשות 1, במקום אחד רשום 2, בשני מקומות רשום 3, בארבעה מקומות רשום 4, בשמונה מקומות רשום 5, ... , ב-256 מקומות רשום 10, ובשאר 488 מקומות רשום 11. במקרה כזה בכל מהלך שני גושים יתאחדו: במהלך מספר k יתאחדו שני גושים בגודל 2^{k-1}, לכל k מ-1. אחרי מהלך 9 יתאחדו שני גושים של 256, וכך תופיע שורה 10 שבה 256 מופיע 512 פעמים, ו-488 מופיע 488 פעמים. במהלך 10 תיווצר שורה עם אותם שני גושים, רק שמספר 512 יופיע 512 פעמים (במקום 256). במהלך מספר 11 תיווצר שורה שזהה לשורה הקודמת, ואז המשחק יסתיים.

נוכיח שהמשחק חייב להסתיים ב-11 מהלכים. זה יפתור לנו את סעיף ב' ואת שאלה כולה. נגיד שגוש יציב אם הוא בגודל n, בכל המקומות שלו רשום n, ואף פעם לא יופיע גוש אחר בגודל n. קל לראות, שהמספרים בגוש יציב לא ישתנו אף פעם. המשחק יסתיים מהלך אחד אחרי שכל המספרים ישתייכו לגושים יציבים; הרי המשחק יכנס למצב, בו שום דבר כבר לא ישתנה, ובמהלך הבא נקבל מצב זהה למצב הקודם, והמשחק יגמר.

טענה. לאחר מהלך k לא יישארו גושים לא יציבים בגודל קטן מ-2^k.

את הטענה נוכיח באינדוקציה. בסיס האינדוקציה: אחרי מהלך ראשון, אין גוש לא יציב בגודל 1. נסתכל על כל הגושים בגודל 1 שהיו בהתחלה. לאחר מהלך הראשון, על כל המקומות שלהם יהיה רשום 1. אם כמות הגושים של 1 היה שונה מ-1, אז כבר אחרי מהלך הראשון לא יהיו גושים של 1, ולכן לא יהיו גושים לא יציבים של 1. אם היה גוש יחיד כזה, אז הוא נהיה יציב (הוא כבר לא יוכל להתאחד אם אף גוש, כי במקום שלו רשום 1, ובמקומות שלהם רשומים מספרים יותר גדולים).

הצעד של אינדוקציה: בהנחה שלאחר מהלך k לא נשארו גושים לא יציבים קטנים מ-2^k, צריך להוכיח שלאחר ממהלך k+1 לא יישארו גושים לא יציבים קטנים מ-2^{k+1}. גוש יכול להיווצר במהלך k+1 מאיחוד של מספר גושים שווי-גודל, שלפחות אחד מהם לא יציב. לכן גוש חדש קטן מ-2^{k+1} כבר לא יכול להיווצר במהלך k+1, כי הוא צריך להיווצר מגושים קטנים מ-2^k, שאחד מהם לא יציב, וכאלה כבר אין. לכן כל גוש בגודל קטן מ-2^{k+1} שיהיה לאחר מהלך k+1 נוצר כבר קודם. כל גוש לא יציב בגודל n שקטן מ-2^{k+1} יהפוך לגוש יציב או יתאחד עם גוש אחר. אכן, לאחר מהלך k+1 יהיה רשום n בכל המקומות שלו. אם היה בתחילת המהלך k עוד גוש בגודל n, אז לאחר מהלך k לא יהיו גושים בגודל n ולא יוצרו יותר (כי אין גושים לא יציבים יותר קטנים). אם זה הגוש היחיד בגודל n, אז במהלך k הוא יתייצב. בזה הוכחנו את הטענה.

ובכן, לאחר 10 מהלכים לא יהיו גושים לא יציבים בגודל שקטן מ-1024, לכן לא יהיו גושים לא יציבים בכלל (הרי סה"כ יש 1000 מספרים בשורה). לכן המצב יתייצב לאחר מהלך 10, כלומר במהלך 11 (אם המשחק לא יעצור קודם) תיווצר שורה שזהה לשורה הקודמת והמשחק ייעצר.

2. משחק מיועד ל-N אנשים. במהלך המשחק כולם יושבים מסביב לשולחן, ועל כל אחד מלבישים קובע לבן או שחור. כל איש מתבקש לנחש את הצבע שלו. הם מוסרים את התשובות בו-זמנית, ואסור לכם להעביר מידע אחד לשני מהרגע שהמשחק מתחיל. מותר לשחקן לא למסור ניחוש. הם מנצחים אם כל מי שניחש ניחש נכון, ולפחות אחד ניסה לנחש (מפסידים אם אף אחד לא ניסה לנחש, או לפחות אחד ניחש באופן שגוי). מותר להם להחליט על אסטרטגיה לפני תחילת המשחק.

א. מהי אסטרטגיה שנותנת סיכוי זכייה מרבי עבור $N = 3$?

ב. מצא\י אסטרטגיה שנותנת סיכוי זכייה טוב יותר עבור $N = 7$.

ג. מצא\י אסטרטגיה שנותנת סיכוי זכייה מרבי למקרה $N = 2^K - 1$.

תשובות. האסטרטגיה עם סיכוי זכייה הטוב ביותר היא נותנת סיכוי $\frac{3}{4}$ בסעיף א', $\frac{7}{8}$ בסעיף ב', ובאופן כללי $\frac{2^K - 1}{2^K}$ בסעיף ג'.

פתרון. לכל אסטרטגיה שיסכמו אותה מראש, יש מצבי ניצחון ומצבי הפסד. למשל, אם כאשר יוסי רואה קובעים מסוימים, לפי אסטרטגיה הוא צריך להגיד שהקובע שלו לבן, אז המצב שבו הקובע שלו שחור (ביחד אם כל הנתונים שהוא רואה) הוא מצב הפסד.
מצב, כמובן, זה נתונים על הצבעים של כל N קובעים שמלבישים. אפשר לראות מצב בתור סדרה בינארית באורך N או קודקוד של קובייה N-ממדית. ובכן, בכל אסטרטגיה יש מצבי הפסד (שבהם לפחות אחד טועה) ומצבי ניצחון (כאשר לפחות אחד מצליח לנחש).

בעצם, כל אחד מהשחקנים לא רואה באיזה קודקוד של קובייה N-ממדית המצב שייך, אבל הוא רואה שהמצב שייך למקצוע מסוים של קובייה N-ממדית. אם מקצוע זה מחבר שני מצבי ניצחון, אז השחקן חייב לשתוק ולא למסור תשובה, אחרת הוא עלול להרוס את אחד מבין מצבי הניצחון. אם מקצוע מחבר מצב ניצחון למצב הפסד, השחקן יכול לתת

תשובה שפוסלת את מצב הפסד (כי בכל מקרה, במצב הפסד החבורה הולכת להפסיד). אם המקצוע מחבר שני מצבי הפסד, זה לא משנה מה השחקן יגיד. בכל מקרה, יש לשחקן סיבה לדבר רק אם מבין שני המצבים שהוא יכול לשאר מצב ניצחון מתקשר למצב הפסד. לכן כל מצב ניצחון קשור במקצוע למצב הפסד בכל אסטרטגיה (כי רק אז מישהו מהשחקנים ידבר).
בקובייה N-ממדית לכל קודקוד יש N שכנים לפי מקצוע, לכן אם יש M מצבי הפסד אז יש לכל היותר MN מצבי ניצחון, לכן $MN+N \geq 2^N$ ולכן $M \geq \frac{2^N}{N+1}$. לכן הסתברות הפסד בכל אסטרטגיה היא לפחות $\frac{1}{N+1}$, ולכן סיכוי ניצחון לא עולה על $\frac{N}{N+1}$.

לכן אי-אפשר לשפר את התשובות שהצענו, ונשאר לראות דוגמה לאסטרטגיה כזו. בעצם, כמו שהסברנו, אסטרטגיה שקולה לבחירת מצבי הפסד (מצבים שבהם אנחנו מוכנים להפסיד) בצורה כזאת, שליד כל מצב שאינו מצב הפסד יש מצב הפסד. אז כל שחקן שרואה שיש לא בחירה בין מצב הפסד למצב אחר, יציין שהמצב אינו מצב הפסד.
במקרה שלנו, כאשר $N = 2^K - 1$, נקבע מראש לכל שחקן מספר בינארי K-ספרתי ששונה מ-00...00. ניתן להגדיר מספר בינארי K-ספרתי X, שהוא XOR של כל המספרים של האנשים שחובשים קובע לבן. נחליט מראש על כך, שמצבי הפסד הם כאשר $X = 00\ldots00$. קל לראות שהסיכוי של זה $\frac{1}{2^K}$. נשאר לבדוק, שכל מצב אחר נמצא על מקצוע, שמחבר אותו למצב הפסד. אכן, נניח כי במצב מסוים X שונה מ-00...00. אז זה מספר בינארי K-ספרתי לא אפסי. לכן זה מספר קובע של שחקן ספציפי. לכן אם נהפוך את צבע הקובע של השחקן הזה, נקבל מצב הפסד. מש"ל.

הערה. במקרה של $N = 3$ ניתן לאפיין את מצבי הפסד כך: כל הקובעים באותו צבע. אם מישהו למשל רואה שני קובעים לבנים, הוא אומר שקובע שלו שחור, כי הסיכוי שכל הקובעים באותו צבע הוא נמוך (1/4), ובמצב הזה אנו מוכנים להפסיד.
במקרה של $N = 7$ ניתן לאפיין את מצבי הפסד כך: נתאים לאנשים נקודות של מישור פרויקטיבי מעל שדה של שני איברים, ונגיד שמצבי הפסד זה כאשר או כל 7 הנקודות באותו צבע, או ששלוש נקודות באותו צבע וכל הנקודות האחרות בצבע אחר.

הערה 2. יתכן שמארגני המשחק יעלו על האסטרטגיה, ויתחילו לשים קובעים על אנשים על מנת להכשיל אותם. אז אפשר להשתמש באסטרטגיה חילופית: לקבוע מספר בינארי K ספרתי כלשהו, ולהגיד שמצבי הפסד זה כאשר X שווה למספר הזה. גם זה יעבוד ויתן אותן הסתברויות לניצחון והפסד.

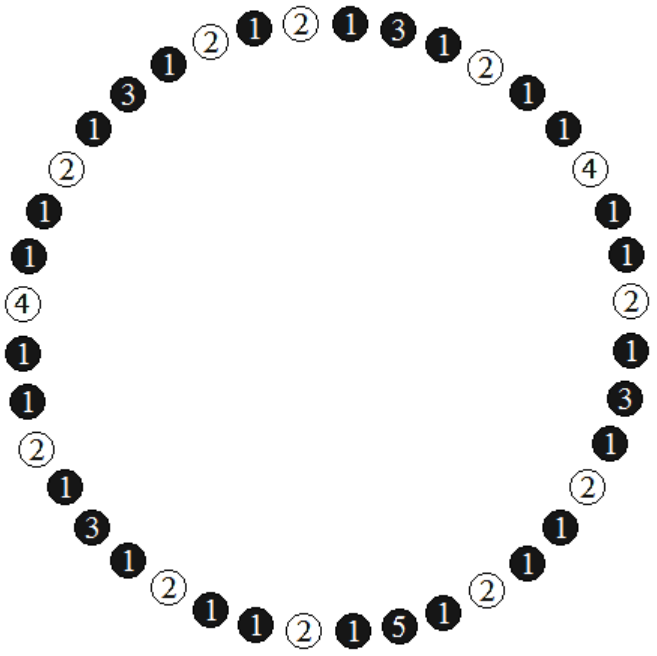
3. נתון מספר טבעי N. נקרא לסדרה של 2^N סימנים שהם אפסים או אחדים מילה. נגיד ששני מילים שונים מהותית, אם הם נבדלות לפחות ב-2^{N-1} ספרות. הוכח\י כי ניתן לבחור 2^{N+1} מילים שכל שניים מהם שונים מהותית.

פתרון. אנחנו נבנה דוגמה באופן אינדוקטיבי.

לכל מילה A נגדיר אינברסיה של מילה $\overline{A}$ זו מילה באותו אורך, שמקבלת אם ב-A מחליפים בכל מקום את הספרה בספרה ההפוכה: 0 ב-1, 1 ב-0. המילים A, $\overline{A}$ נבדלים בכל הספרות.

עבור N = 1, יש 4 מילים באורך 2 שכל שניים מהן שונות מהותית: 00, 01, 10, 11. כעת נניח שכבר הצלחנו לבנות 2^{N+1} מילים $w_1,...,w_{2^{N+1}}$, ונניח בנוסף שביחד אם כל מילה יש ברשימה את האינברסיה שלה (ברור שבבסיס של אינדוקציה זה מתקיים).
נתבונן כעת בכל המילים $w_k w_k$ ביחד אם כל המילים $w_k \overline{w_k}$. נשים לב, שברשימה כעת 2^{N+2} מילים באורך 2^{N+1}. נבדוק שכל שני מילים ברשימה נבדלים לפחות בחצי מקומות.
אם נתונים שני מילים שונות מהרשימה החדשה v_1v_2, v_3v_4 (כאשר v_1,v_2,v_3,v_4 מילים באורך 2^N). אז יש שלוש אפשרויות: או ש-$v_1 \neq v_3, v_2 \neq v_4$ ואז המילים נבדלים לפחות בחצי ספרות גם במחצית הראשונה וגם במחצית השנייה וגם בסה"כ, או ש-$v_1 = v_3$ ואז לפי הבנייה $v_2 = \overline{v_4}$, או ש-$v_2 = v_4$ ואז $v_1 = \overline{v_3}$. גם בשני המקרים האחרונים המילים נבדלים בחצי מהמקומות. מש"ל.

4. על המעגל נמצאים כלי משחק, בצבעים שחור ולבן. בכל תור הראשון מוריד מהמעגל את הכלים השחורים שסמוכים לכלים הלבנים, ולאחר מכן השני מוריד את כל הכלים הלבנים שסמוכים לכלים השחורים. כך ממשיכים, עד שכל הכלים יהיו באותו צבע.
א. נניח כי בהתחלה יש 40 כלים. האם יתכן, שלאחר שני מהלכים של כל שחקן יישאר כלי אחד בדיוק?
ב. נניח כי בהתחלה יש 1000 כלים. תוך איזה מספר מינימאלי של מהלכים עלול להיווצר מצב, שנשאר בדיוק כלי אחד?



תשובות. א. כן. ב. 8

פתרון. א. דוגמה מופיע בציור, כאשר על כל כלי רשום כמה מהלכים הוא שורד.
קל לבנות את הסדרה מהסוף. בסוף נשאר כלי שחור 1, שיסומן 5.
5
בצעד הקודם היו לידו כלי אחד או שניים בצבע לבן. נסמן אותם 4 (כדאי לקחת 2, כי צריכים להגיע ל-40 כלים)

לפני זה היו עוד מספר כלים שחורים שיסומנו 3. חייבים להיות כלים כאלה בין 4 ל-5, אחרת היו מורידים את הכלי שסומן 5 כבר קודם, ואפשר גם לשים אחד או שניים כאלה בנוסף. הכי הרבה כלים שהיו יכולים להיות:

3 4 **3** **5** **3** 4 **3**

צעד אחד קודם הורידו כלים לבנים שיסומנו 2. אפשר להוסיף כאלה בכל צד של כל מספר אי-זוגי, אבל חייבים שיופיע אחד כזה בכל צד של כל 4, אחרת היו מורידים את ה-4 הזה כבר קודם. לכן המעגל הכי גדול שהיה יכול להיות הוא

2 **3** 2 4 2 **3** 2 2 **5** 2 2 **3** 2 4 2 **3** 2

כאן במעגל יש כבר 17 מספרים. על מנת לקבל את מה שהיה בתחילת המשחק צריך להוסיף עוד כלים שחורים שיסומנו 1. חייבים להוסיף אחד כזה בין כל שחור ללבן, אבל אפשר להוסיף אחד בכל צד של כל כלי שחור (זוגי). מכיוון שיש כבר 12 זוגיים, אז אפשר להוסיף 24, לכן אפשר להוסיף לא את כולם אלה אחד פחות, למשל לא להוסיף אחד באחד הקצוות. נקבל

2 1 **3** 1 2 1 1 4 1 1 2 1 **3** 1 2 1 1 4 1 1 2 1 **3** 1 2 1 1 2 1 **5** 1 2 1 1 2 1 **3** 1 2 1 1 4 1 1 2 1 **3** 1 2 1

מהבנייה גם ברור שלא יתכן שנתחיל אם 42 כלים ולאחר שני מהלכים של כל שחקן נישאר אם כלי אחד בלבד.

ב. שוב, נפתור מהסוף. נניח שבסוף יש כלי אחד שחור. אז איזה מספר מרבי של כלים היה יכול להיות בפעם הקודמת?

באופן כללי, נניח כי n שלבים מהסוף יש k_n, מתוכם w_n לבנים ו-b_n שחורים. אם בשלב הקודם הורידו לבנים, אז היו יכולים להוריד לכל היותר $2b_n$ לבנים, ואם בפעם הקודמת הורידו שחורים אז היו יכולים להוריד $2w_n$ שחורים. לכן אפשר ללכת מהסוף ולראות כמה הכי הרבה היו יכולים להיות בשלב הקודם (נניח ללא הגבלת הכלליות שבסוף הורידו לבנים, במקרה הגרוע נחליף בסוף בין שחור ללבן). את התוצאות נוח לרשום בטבלא:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
w_n	0	2	2	12	12	70	70	408	408
b_n	1	1	5	5	29	29	169	169	985
k_n	1	3	7	17	41	99	239	577	1393

נשים לב, שבשלב האחרון אפשר להוסיף 816 לבנים, אבל אפשר גם כל כמות יותר קטנה (אבל לא יותר קטנה מאשר 338). לכן אפשר להגיע ל-1000 בדיוק ב-8 מהלכים (4 מהלכים של כל שחקן) ואי-אפשר ב-7 מהלכים. לכן התשובה היא 8.

5*. נתונה סדרת מספרים מ-1 עד N. סדרה אוניברסאלית זו סדרה של מספרים מ-1 עד N, שמתוכה באמצעות מחיקת מספרים ניתן לקבל כל תמורה של מספרי מ-1 עד N. למשל: סדרה $1,2,3,1,2,1,3$ אוניברסאלית, וסדרה $1,2,3,2,1,3,1$ איננה אוניברסאלית, כי לא ניתן לקבל ממנה $3,1,2$ על ידי מחיקה.

א. הוכח\י שקיימת סדרה אוניברסאלית באורך N^2-N+1.

ב. הוכח\י שהאורך של סדרה אוניברסאלית זה לפחות $\frac{N(N+1)}{2}$.

ג. מהו האורך המינימאלי של סדרה אוניברסאלית עבור $N=4$?

ד. נסה\י לשפר את ההערכות שקיבלת בסעיפים א', ב' (עבור האורך המינימאלי של סדרה אוניברסאלית).

פתרון. א. על מנת להוכיח את זה, מספיק לבנות סדרה אוניברסאלית באורך N^2-N+1.

בנייה ראשונה: $12...N\ 12...N\ \ldots\ 12...N\ 1$
כאן סדרה $12...N$ חוזרת על עצמה $N-1$ פעמים. ניתן לחלק כל תמורה לקטעים עולים, וכל קטע אפשר לבחור מתוך רצף $12...N$. ברוב התמורות יש פחות מאשר N קטעים עולים, לכן אפשר למצוא תמורות אלה בסדרה שבנינו. יש רק תמורה אחת שצריכה N קטעים, וזו התמורה $N...321$, וגם אותה אפשר למצוא: כל מספר נלקח מקטע נפרד, ויש 1 בסוף.

בנייה שנייה: $...32123...(N-1)N(N-1)...123...$
גם בבנייה הזאת יש קטעים שמכילים את כל N המספרים, אבל בקטעים הזוגיים המספרים הולכים בסדר עולה, ובמספרים האי-זוגיים בסדר יורד. סה"כ יש N קטעים, אבל הקצוות של הקטעים מודבקים, לכן אנחנו חוסכים $N-1$ מספרים בחיבורים בין הקטעים. לכל תמורה ניתן לבחור מספר ראשון שלה בקטע ראשון, מספר שני בקטע שני, מספר שלישי בקטע שלישי וכך הלאה, ולכן כל תמורה נמצאת בסדרה אוניברסאלית זו.

ב. נתבונן בסדרה אוניברסאלית מסוימת. ניקח מספר a_1 שלא מופיע ב-$N-1$ מקומות ראשונים (יש כזה). ניקח מספר a_2, שהוא שונה מ-a_1 ולא מופיע ב-$N-2$ מקומות הבאים אחרי ההופעה הראשונה של a_1. ניקח מספר a_3 שהוא שונה מ-a_1,a_2 ולא מופיע ב-$N-3$ מקומות הבאים אחרי הפעם הראשונה ש-a_2 מופיע לאחר הופעה של a_1. נמשיך באותה צורה.
כעת נסתכל בתמורה $a_1a_2a_3...a_n$. ההופעה הראשונה של a_1 היא במקום N לפחות; ההופעה הראשונה של a_2 בתוך סדרה a_1a_2 היא במקום $N+(N-1)$ לפחות; הופעת a_3 הראשונה בתוך $a_1a_2a_3$ היא במקום $N+(N-1)+(N-2)$ לפחות; וכך הלאה, ולכן הופעת a_n הראשונה ב-$a_1a_2a_3...a_n$ במקום $N+(N-1)+(N-2)+...+1$ לפחות שזה בעצם $\frac{N(N+1)}{2}$. לפיכך כל סדרה אוניברסאלית היא באורך $\frac{N(N+1)}{2}$ לפחות.

ג. התשובה היא 12. הנה דוגמה לסדרה אוניברסאלית באורך 12:

1 2 3 4 2 1 3 2 4 1 2 3

אם נתבונן בסדרות מתחילות ב-4 השמאלי, המשך הסדרה חייב להיות תת סדרה של
2 1 3 2 1 2 3
קל לראות שהסדרה הזאת מכילה כל תמורה של 3 איברים (אכן, אם 3 בקצה אז אפשר ליצור כל צירוף של 1 או 2 מתוך הרצף 2 1 2, ואז אפשר להוסיף 3 מימין או משמאל. אם 3 באמצע אז לוקחים את ה-3 השמאלי ומדביקים לו את 1 או 2 לפי הצורך מימין ומשמאל. ובכן, ניתן בסדרה שלנו ליצור כל תמורה שמתחילה ב-4.

אם כך , כל תמורה מסוג X 4 Y Z גם נמצאת: באמצעות ה-4 השמאלי אפשר לבחור אפילו תת-סדרה X Z Y 4 ואפשר להוסיף את X גם בצד שמאל של 4.
באופן דומה ממש מוכיחים שאפשר (בעזרת ה-4 הימני) לבחור כל תת-סדרה שמסתיימת ב-4, או כזאת שאצלה 4 במקום השלישי.
ובכן, הסדרה הממוסגרת אוניברסאלית.

טענת עזר: סדרה אוניברסאלית הכי קצרה עבור $N=3$ היא באורך 7.

הוכחת הטענה. כבר הצגנו סדרה אוניברסאלית באורך 7 (בסוף של העמוד הקודם, או בשתי השיטות שראינו בסעיף א'). צריך להוכיח שאין סדרה אוניברסאלית באורך 6.
ללא הגבלת הכלליות, 3 לא מופיע בשני מקומות השמאליים. לכן ה-3 השמאלי ביותר הוא השלישי משמאל. נתבונן בתתי-סדרות שהן תמורות שמתחילות ב-3. ברור שבכל תמורה כזאת ניתן לקחת את ה-3 השמאלי ביותר. לכן בצד ימין של ה-3 השמאלי ביותר יש סדרה אוניברסאלית עבור $N=2$. זה אומר שיש מימינו לפחות שלושה מספרים שהם 1 ו-2. לכן מימין המספר 3 השמאלי ביותר נמצא במקום שלישי (משמאל), והוא ה-3 היחיד בסדרה. אבל אז גם משמאלו חייבת להיות סדרה אוניברסאלית עבור $N=2$. סתירה.

כעת נחזור למקרה $N=4$. נניח שיש סדרה אוניברסאלית באורך 11. ללא הגבלת הכלליות, 4 לא מופיע ב-3 משבצות השמאליות ביותר. לכן ה-4 השמאלי ביותר מופיע במקום 4 (משמאל) לפחות. מימין ל-4 זה יש סדרה אוניברסאלית עבור $N=3$. לכן לפי טענת עזר, מימין ל-4 הזה יש לפחות 7 מספרים שהם כולם 1, 2, 3. לכן ה-4 הזה הוא ה-4 היחיד, הרי משמאלו יש לפחות שבעה מספרים שונים מ-4, ומימינו יש לפחות שלושה, אז סה"כ יש 10 מספרים שונים מ-4. אבל אז משמאלו חייבת להיות סדרה אוניברסאלית עבור $N=3$, כלומר לפחות שבעה מספרים, אבל יש שם מקום רק לשלושה. מש"ל.

ד. ניתן להכליל את השיקולים של הוכחה מסעיף ג'. נסמן ב-U_N זה אורך של סדרה אוניברסאלית עבור N. ניקח סדרה אוניברסאלית של N. ללא הגבלת הכלליות, ההופעה הראשונה של N היא במקום N לפחות, ואחרי ההופעה הראשונה של N חייבים להיות לפחות U_{N-1} מספרים שונים מ-N. כמו כן, אם זו ההופעה היחידה של N אז לפניו חייבים להיות יותר מאשר $N-1$ מספרים. לכן כמות הכוללת של המספרים (עבור $N>3$) גדולה מ-$N+U_{N-1}$. ובכן, $U_n \geq N+1+U_{N-1}$ לכן $N>3$.
כבר ראינו כי $U_4=12$, $U_3=7$.
מכאן נוכיח באינדוקציה כי $U_N \geq \frac{(N+2)(N+1)}{2}-3$ לכל $N \geq 3$.
בסיס אינדוקציה: עבור 3 מקבלים $\frac{5\cdot 4}{2}-3=10-3=7=U_3$.
צעד: בהינתן $U_{N-1} \geq \frac{(N+1)N}{2}-3$, אז כמו שהוכחנו

$$U_n \geq N+1+U_{N-1} \geq N+1+\frac{(N+1)N}{2}-3=3=\frac{(N+2)(N+1)}{2}-3$$

נוסחא זאת נותנת הערכות מדויקות $U_4 \geq 12$, $U_3 \geq 7$, והערכה $U_5 \geq 18$.

נראה דוגמה של סדרה אוניברסאלית באורך $N(N-2)+4$.
בפרט, זה אומר כי $U_5 \le 19$.

$$1\ N\ 2\ \underbrace{(N-2)\ (N-1)\ 3\ \ldots\ (N-1)\ 2\ N\ 1}\ \ldots\ \underbrace{(N-2)\ N\ (N-1)\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ (N-2)\ N}\ \underbrace{(N-1)\ N\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ (N-1)\ N}$$

הסדרה מורכבת מקטעים, כאשר בכל קטע $(N-1)\ \ldots\ 2\ 1$ מסודרים בסדר עולה, והמספר N מתקדם צעד אחד שמאלה, כל פעם שעוברים לקטע ימני יותר.
סה"כ יש $N-2$ קטעים ברשימה, משמאל לקטע השמאלי רשום N ומימין לקטע הימני רשום $1\ N\ 2$.
נשים לב, שאם ניקח את ההופעה מספר $k+1$ של N ותעלם מכל ההופעות של N האחרות, אז מצד שמאל של N נראה סדרה

$$\underbrace{(N-k)\ \ldots\ 3\ 2\ 1}\ \underbrace{(N-1)\ \ldots\ 3\ 2\ 1}\ \ldots\ \underbrace{(N-1)\ \ldots\ 3\ 2\ 1}\ \underbrace{(N-1)\ \ldots\ 3\ 2\ 1}$$

סה"כ יהיו k קטעים, שכולם חוץ מאחרון מכילים את כל המספרים בסדר עולה, והאחרון מכיל מספרים רק עד $N-k$ בסדר עולה. בסדרה זאת אפשר לבחור כל תת-סדרה של $1,2,\ldots,(N-1)$ של k מספרים ללא חזרות: אם יש בתת-סדרה זאת עליה, אז אפשר לקחת שני מספרים מאותו קטע, ואם יש בה רק ירידות, אז המספר האחרות אינו עולה על $N-k$.
באופן דומה רואים, שלאחר הופעה מספר $k+1$ של N ניתן לבחור כל תת-סדרה של $N-2-k$ מספרים ללא חזרות. לכן יש את כל התמורות שמכילות את N במקום $k+1$, וכך לכל k.

הערה. אם תצליחו להבין למקרה של $N=5$ האם התשובה היא 18 או 19, כנראה שתוכלו לשפר גם את ההערכות למקרה הכללי.