תרגיל 18

1. בתחילת המשחק רשומים 1000 מספרים טבעיים כלשהם בשורה. בכל מהלך רושמים מתחת לשורה אחרונה שורה נוספת, לפי הכלל הבא: אם מספר A מופיע בשורה האחרונה N פעמים, אז מתחת למספר A יהיה רשום N. המשחק מסתיים כאשר השורה האחרונה שנרשמה זהה לשורה הקודמת.

א. הוכח\י כי לאחר מספר סופי של מהלכים המשחק חייב להסתיים.

ב. מצא\י את המספר המינימלי K, עבורו אפשר להוכיח שהמשחק יסתיים תוך K מהלכים לכל היותר, אבל קיימת דוגמה של שורה התחלתית עבורה המשחק לא יסתיים בפחות מ-K מהלכים.

2. משחק מיועד ל-N אנשים. במהלך המשחק כולם יושבים מסביב לשולחן, ועל כל אחד מלבישים קובע לבן או שחור. כל איש מתבקש לנחש את הצבע שלו. הם מוסרים את התשובות בו-זמנית, ואסור לכם להעביר מידע אחד לשני מהרגע שהמשחק מתחיל. מותר לשחקן לא למסור ניחוש. הם מנצחים אם כל מי שניחש ניחש נכון, ולפחות אחד ניסה לנחש (מפסידים אם אף אחד לא ניסה לנחש, או לפחות אחד ניחש באופן שגוי). מותר להם להחליט על אסטרטגיה לפני תחילת המשחק.

א. מהי אסטרטגיה שנותנת סיכוי זכייה מרבי עבור $N = 3$?

ב. מצא\י אסטרטגיה שנותנת סיכוי זכייה טוב יותר עבור $N = 7$.

ג. מצא\י אסטרטגיה שנותנת סיכוי זכייה מרבי למקרה $N = 2^K - 1$.

3. נתון מספר טבעי N. נקרא לסדרה של 2^N סימנים שהם אפסים או אחדים מילה. נגיד ששני מילים שונים מהותית, אם הם נבדלות לפחות ב-2^{N-1} ספרות. הוכח\י כי ניתן לבחור 2^{N+1} מילים שכל שניים מהם שונים מהותית.

4. על המעגל נמצאים כלי משחק, בצבעים שחור ולבן. בכל תור הראשון מוריד מהמעגל את הכלים השחורים שסמוכים לכלים הלבנים, ולאחר מכן השני מוריד את כל הכלים הלבנים שסמוכים לכלים השחורים. כך ממשיכים, עד שכל הכלים יהיו באותו צבע.

א. נניח כי בהתחלה יש 40 כלים. האם יתכן, שלאחר שני מהלכים של כל שחקן יישאר כלי אחד בדיוק?

ב. נניח כי בהתחלה יש 1000 כלים. תוך איזה מספר מינימאלי של מהלכים עלול להיווצר מצב, שנשאר בדיוק כלי אחד?

5*. נתונה סדרת מספרים מ-1 עד N. סדרה אוניברסאלית זו סדרה של מספרים מ-1 עד N, שמתוכה באמצעות מחיקת מספרים ניתן לקבל כל תמורה של מספרי מ-1 עד N. למשל: סדרה $1,2,3,1,2,1,3$ אוניברסאלית, וסדרה $1,2,3,2,1,3,1$ איננה אוניברסאלית, כי לא ניתן לקבל ממנה $3,1,2$ על ידי מחיקה.

א. הוכח\י שקיימת סדרה אוניברסאלית באורך $N^2 - N + 1$.

ב. הוכח\י שהאורך של סדרה אוניברסאלית זה לפחות $\frac{N(N+1)}{2}$.

ג. מהו האורך המינימאלי של סדרה אוניברסאלית עבור $N = 4$?

ד. נסה\י לשפר את ההערכות שקיבלת בסעיפים א', ב' (עבור האורך המינימאלי של סדרה אוניברסאלית).