תרגיל 17

1. מצא\י את כמות הזוגות הסדורים של מספרים טבעיים (x,y) המקיימים:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2004}.$$

פתרון. נכפיל במכנה:

$$2004(x+y)=xy$$

כלומר

$$2004^2=xy-2004x-2004y+2004^2$$

$$2004^2=(x-2004)(y-2004)$$

נפרק את 2004 לגורמים: $2004=4\cdot 501=2^2\cdot 3\cdot 167$. לכן

$$2^4\cdot 3^2\cdot 167^2=(x-2004)(y-2004).$$

אם נפרק את $2^4\cdot 3^2\cdot 167^2=2004^2$ למכפלה של שני גורמים שלמים $a\cdot b$, יש שני מקרים: או ששני הגורמים חיוביים, ואז $b=y-2004$, $a=x-2004$, ואז מקבלים שני מספרים טבעיים $y=b+2004$, $x=a+2004$. אם שני הגורמים שליליים אז אחד מהם קטן מ-2004, ואז אחד מבין שני המספרים $y=b+2004$, $x=a+2004$ לא יהיה חיובי. ובכן, צריך לספור את כל הפירוקים לשני גורמים טבעיים של $2^4\cdot 3^2\cdot 167^2$ ולכן הגורם הראשון הוא $2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 167^\gamma$ כאשר $0\le\gamma\le 2$, $0\le\beta\le 2$, $0\le\alpha\le 4$, ולזה יש $5\cdot 3\cdot 3=45$ אפשרויות.

2. למצוא את כל הפתרונות בשלמים למשוואה $x^2+y^2=(x-y)^3$.

פתרון. ניסוח שקול $2xy=(x-y)^3-(x^2-2xy+y^2)$.

כלומר $2xy=(x-y)^2(x-y-1)$.

לכן $(x-y)^2 \mid 2xy$. אם לזוג x,y מתקיימת התחלקות $(x-y)^2 \mid 2xy$, אז גם אם נצמצם במחלק משותף מקסימאלי $x=d\cdot x_1$, $y=d\cdot y_1$ כאשר $d=(x,y)$, אז מתקיים גם $(x_1-y_1)^2 \mid 2x_1y_1$. אבל כעת x_1-y_1 זר ל-x_1 וגם ל-y_1 לכן $(x_1-y_1)^2 \mid 2$.

לכן $x_1-y_1=\pm 1$. במשוואה המקורית $x^2+y^2=(x-y)^3$ שני האגפים אי-שליליים, לכן $x\ge y$. לכן גם $x_1-y_1\ge 1$, כלומר $x_1-y_1=1$. לכן

$$d^2\cdot 2x_1y_1=d^2(x_1-y_1)^2\left(d\cdot(x_1-y_1)-1\right)$$

אבל $x_1-y_1=1$ כלומר $2(y_1+1)y_1=d-1$.

לכן לכל s שלם ניתן להגדיר $y_1=s$, לכן $d=2(s+1)s+1=2s^2+2s+1$, ולכן $x_1=s+1$ ואז $\boxed{x=(s+1)(2s^2+2s+1)\ ,\ y=s(2s^2+2s+1)}$.

קל לבדוק שכל המספרים האלה מתאימים.

3. האם מספר מסוג 10001...100010001 (במספר יש רק אפסים ואחדים, בין כל שני אחדים סמוכים יש בדיוק 3 אפסים) יכול להיות ראשוני?

פתרון. במקרה שבו יש כמות זוגית של אחדים, המספר מתחלק ב-10001.
בדיקה ארוכה מראה כי 10001 פריק: $10001 = 137 \cdot 73$.
נשאר המקרה שיש כמות אי-זוגית של אחדים.
נתבונן בפולינום $1 + x^4 + x^8 + \ldots + x^{4k}$ כאשר k זוגי וננסה לפרק אותו לגורמים. שורשיו הם מספרים מרוכבים, וכל שורש α מקיים $x^4 = e^{2\pi ki/n}$ כאשר $n \nmid k$. לכן $\pm\alpha^2$ הוא שורש של $1 + x + x^2 + \ldots + x^k$. כך אפשר לנחש את הפירוק

$$1 + x^4 + x^8 + \ldots + x^{4k} = \left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k}\right)\left(1 - x^2 + x^4 - \ldots + x^{2k}\right)$$

ברגע שניחשנו את הפירוק, לא קשה לבדוק אותו על ידי פתיחת סוגריים:

$$\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k}\right)\left(1 - x^2 + x^4 - \ldots + x^{2k}\right) =$$

$$= \left(1 + x^4 + \ldots + x^{2k}\right)^2 - \left(x^2 + \ldots + x^{2k-2}\right)^2 =$$

$$= \left(1 + \left(x^4 + \ldots + x^{2k}\right)\right)\left(\left(1 + \ldots + x^{2k-4}\right) + x^{2k}\right) - x^4\left(1 + \ldots + x^{2k-4}\right)^2 =$$

$$= \left(1 + \ldots + x^{2k-4}\right) + x^{2k} + \cancel{\left(x^4 + \ldots + x^{2k}\right)\left(1 + \ldots + x^{2k-4}\right)} + \left(x^4 + \ldots + x^{2k}\right)x^{2k} -$$

$$- \cancel{x^4\left(1 + \ldots + x^{2k-4}\right)^2} = 1 + \ldots + x^{2k-4} + x^{2k} + x^{2k+4} + \ldots + x^{4k}$$

ובכן, 10001...1000100010001 לא ראשוני גם כאשר יש מספר אי-זוג של אחדים, כי הוא מתחלק במספר הזברה 101...10101 עם אותה כמות של אחדים.

4. מצא את המספר הטבעי הגדול ביותר k עבורו

$$1991^k \;\Big|\; \left(1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}\right).$$

פתרון. נגיד שמספרים $a \neq b$ הם **קרובים מדרגה k** אם $a - b$ מתחלק ב-1991^k אבל לא ב-1991^{k+1}. למשל: 1 ו-1992 קרובים מדרגה 1.

טענה. אם a קרוב ל-± 1 מדרגה k חיובית, אז a^{1991} קרוב ל-± 1 מדרגה $k+1$.

הוכחת הטענה. $a = b \cdot 1991^k \pm 1$, כאשר $1991 \nmid b$. לכן

$$a^{1991} = \left(\pm 1 + 1991^k b\right)^{1991} = \pm 1 + 1991 \cdot 1991^k b \pm \binom{1991}{2} 1991^{2k} b^2 + 1991^{3k} M$$

כלומר $a^{1991} = \left(\pm 1 + 1991^k b\right)^{1991} = \pm 1 + 1991^{k+1} b + 1991^{3k} N$.

קל לראות כי $1991^{k+1} b + 1991^{3k} N$ מתחלק ב-1991^{k+1} והמנה $b + 1991^{2k-1} N$, וזה מספר שלא מתחלק ב-1991.

מסקנה מהטענה: אם a קרוב ל-± 1 מדרגה k, אז a^{1991^m} קרוב ל-± 1 מדרגה $k+m$.
זה ברור, כי בעצם $a^{1991^m} = \left(\left(a^{1991}\right)^{1991}\right)^{\cdots}$, כאשר m פעמים מעלים בחזקה 1991, ולכן מקבלים ובכל פעם שמעלים בחזקה 1991 דרגת הקרבה גדלה ב-1.

ובכן, $1992^{1991^{1990}}$ קרוב ל-1 מדרגה 1991, ואילו $1990^{1991^{1992}}$ קרוב ל--1 מדרגה 1993. לכן

$$1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}} = u \cdot 1991^{1993} + 1 + v \cdot 1991^{1991} - 1 =$$
$$= u \cdot 1991^{1993} + v \cdot 1991^{1991}$$

קל לראות שדבר כזה מתחלק ב-1991^{1991} אבל לא ב-1991^{1992}.

לכן התשובה לשאלה היא 1991.

5. יהיו $K > L > M > N$ מספרים שלמים חיוביים, המקיימים

$$KM + LN = \left(K + L - M + N\right)\left(L + M + N - K\right)$$

הוכח\י כי $KL + MN$ פריק.

פתרון. נפתח סוגריים:

$$KM + LN = \left(L + N\right)^2 - \left(K - M\right)^2 = L^2 + N^2 - K^2 - M^2 + 2LN + 2KM$$

כלומר $K^2 - KM + M^2 = L^2 + LN + N^2$.

קל לראות (תרגיל לקוראים) כי $KL + MN > KM + LN > KN + LM$.
מצד שני

$$\left(KM + LN\right) \cdot \left(L^2 + LN + N^2\right) =$$
$$= KM \cdot \left(L^2 + \cancel{LN} + N^2\right) + LN \cdot \left(K^2 - \cancel{KM} + M^2\right) =$$
$$= KML^2 + KMN^2 + LNK^2 + LNM^2 =$$
$$= KL \cdot LM + KN \cdot MN + KL \cdot KN + LM \cdot MN =$$
$$= KL\left(LM + KN\right) + MN\left(KN + LM\right) = \left(KL + MN\right)\left(KN + LM\right)$$

ובכן, $\left(KM + LN\right) \mid \left(KL + MN\right)\left(KN + LM\right)$.
לא יתכן כי $\left(KM + LN\right) \mid \left(KN + LM\right)$, כי אז מספר מתחלק במספר יותר גדול. לכן למספרים $KL + MN$, $KM + LN$ יש מחלק משותף $d > 1$. הוא d קטן ממש מ-$KL + MN$, לכן $KL + MN$ אינו ראשוני. מש"ל.

הערה. לא קשה למצוא מספרים K, L, M, N שמקיימים את התנאי: למשל 1, 5, 9, 11.
זה כמובן קשור למעגלים שמכילים מספר נקודות על שריג משולשי.

6. מצא את כל זוגות השלמים, המקיימים $x^4-2y^2=1$.

פתרון. מספיק למצוא פתרונות אי-שליליים, כי החלפת סימן של x,y לא משפיע על נכונות המשוואה. ברור כי x אי-זוגי. כלומר $x=2t+1$.

$$x^4-1=2y^2$$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)=2y^2$$

$$2t\cdot(2t+2)(4t^2+4t+2)=2y^2$$

$$4\cdot t(t+1)(2t(t+1)+1)=y^2$$

לכן y זוגי, כלומר $y=2u$, כלומר

$$t(t+1)(2t(t+1)+1)=u^2$$

הגורמים בצד שמאל של המשוואה $t,(t+1),(2t(t+1)+1)$ זרים בזוגות.

לכן כולם ריבועים. ובכן גם t וגם $t+1$ ריבוע, לכן $t=0$. אז $x=1$ ואז $y=0$.