תרגיל 16

1. בהינתן $a+b+c+d+e=1\ ,a,b,c,d,e\geq 0$

א. הוכח\י כי $ab+bc+cd+de+ea\leq\frac{1}{4}$.

ב. הוכח\י כי $\left(ab+bc+cd+de+ea\right)\left(ac+bd+ce+da+eb\right)\leq\frac{1}{25}$.

א. פתרון ראשון. נקבע את b,d,e ונסה להזיז את a,c. סכומם $a+c$ קבוע, לכן הכול פונקציה ליניארית של a. לכן $ab+bc+cd+de+ea$ ישתנה באופן ליניארי, ומקסימום יתקבל באחד מבין קצוות התחום. לכן ניתן להניח, כי מבין a,c אחד המספרים שווה ל-0 והשני שווה לסכום שלהם.

דבר דומה ניתן להגיד על כל שני משתנים, שאינם צמודים. לכן מספיק להוכיח את הטענה כאשר רק שני משתנים צמודים (במעגל) שונים מ-0. כמו למשל $a+b=1$, וצריך להוכיח $ab\leq\frac{1}{4}$. כלומר $4ab\leq 1$, במילים אחרות $4ab\leq a^2+2ab+b^2$, זאת אומרת $0\leq a^2-2ab+b^2$ וזה ברור.

פתרון שני. ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות כי $b\geq a$ (אחרת נשנה את שמות הנעלמים במעגל עד שזה יהיה נכון). נפתח סוגריים באי-שוויון $0\leq\left(a-b+c-d+e\right)^2$.

נקבל $0\leq\left(a+c+e\right)^2+\left(b+d\right)^2-2\left(a+c+e\right)\left(b+d\right)$.

כלומר $4\left(a+c+e\right)\left(b+d\right)\leq\left(a+c+e\right)^2+\left(b+d\right)^2+2\left(a+c+e\right)\left(b+d\right)$.

במילים אחרות $4\left(a+c+e\right)\left(b+d\right)\leq\left(a+c+e+b+d\right)^2=1$.

כלומר $4\left(ab+bc+cd+de+ad+be\right)\leq 1$

לכן $ab+bc+cd+de+ea\leq ab+bc+cd+de+ad+be\leq\frac{1}{4}$.

הרי $ea\leq be$. מש"ל.

ב. צריך להוכיח $\left(ab+bc+cd+de+ea\right)\left(ac+bd+ce+da+eb\right)\leq\frac{1}{25}$.

קל לראות כי $0\leq\frac{1}{2}\left(a-b\right)^2$ לכן $ab\leq\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$. כאשר מסכמים ביטוים כאלה במעגל, מקבלים $\sum_{cyc}ab\leq\sum_{cyc}a^2$. באופן דומה, אם מסכמים במעגל ביטוים הדומים ל-$ab\leq\frac{1}{2}\left(a^2+c^2\right)$ אז מקבלים $\sum_{cyc}ac\leq\sum_{cyc}a^2$.

כעת נסמן: $C=\sum_{cyc}ac$, $B=\sum_{cyc}ab$, $A=\sum_{cyc}a^2$. ראינו כי $A\geq C$, $A\geq B$.

בנוסף, $1=\left(a+b+c+d+e\right)^2=A+2B+2C$, כמו שרואים מפתיחת סוגריים.

לכן $1=A+2B+2C$, כלומר $A\geq\frac{1}{5}$, לכן $2B+2C\leq\frac{4}{5}$ ז. א. $B+C\leq\frac{2}{5}$.

לכן $B\cdot C\leq\frac{1}{4}\left(B+C\right)^2\leq\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$. מש"ל.

הערה. בעצם, גם לפני שהשלמנו את החישוב, היה ברור שזה יסתדר אם לא נעשה שגיאת חישוב, כי בשני האגפים אותו משקל, לכן השוויון מתקבל כאשר $a=b=c$.

2. בהינתן $abc=1\ ,\ a,b,c>0$

א. הוכח\י כי $\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\geq 1$.

ב. הוכח\י כי $\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\leq 3$.

א. פתרון ראשון. נכפיל במחנה ונפתח סוגריים.

$$\sum_{cyc}\left(a^2+a+1\right)\left(b^2+b+1\right)\geq\left(a^2+a+1\right)\left(b^2+b+1\right)\left(c^2+c+1\right)$$

$$\sum_{cyc}a^2b^2+\sum_{sym}a^2b+\sum_{cyc}ab+2\sum_{cyc}a^2+2\sum_{cyc}a+3\geq$$

$$\geq 3+\sum_{sym}a^2b+2\sum_{cyc}a+\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}a^2b^2+2\sum_{cyc}ab$$

נצמצם את מה שמצטמצם ויישאר: $\sum_{cyc}a^2\geq\sum_{cyc}ab$ וזה קל ממש.

פתרון שני. נשתמש בהצבה: $a=\frac{yz}{x^2}\ ,\ b=\frac{xz}{y^2}\ ,\ c=\frac{xy}{z^2}$.

כמובן, צריך לבדוק שכל שלישיה המקיימת $abc=1$ ניתן להציג בצורה כזו. מספיק ששתי משוואות יתקיימו $a=\frac{yz}{x^2}\ ,\ b=\frac{xz}{y^2}$, השלישית תתקבל באופן אוטומטי. קודם כל, נבחר x,y כן ש-$\frac{a}{b}=\frac{y^3}{x^3}$. כעת מספיק לבחור z כך ש-$a=\frac{yz}{x^2}$ ואז גם משוואה שנייה תתקיים באופן אוטומטי, ובחירה כזאת עבור z אפשרית.

כעת נציב את הביטוי $a=\frac{yz}{x^2}$ במחובר $\frac{1}{a^2+a+1}$ ונקבל

$$\frac{1}{a^2+a+1}=\frac{1}{\left(\frac{yz}{x^2}\right)^2+\frac{yz}{x^2}+1}=\frac{x^4}{y^2z^2+yzx+x^4}.$$

לכן אי-שוויון המקורי מקבל צורה

$$\frac{x^4}{y^2z^2+yzx^2+x^4}+\frac{y^4}{x^2z^2+xzy^2+y^4}+\frac{z^4}{x^2y^2+xyz^2+z^4}\geq 1.$$

לפי אי-שוויון קושי-שוורץ מספיק לבדוק כי $\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{\sum_{cyc}\left(y^2z^2+yzx^2+x^4\right)}\geq 1$.

נכפיל במחנה ונפתח סוגריים. לאחר צמצום יתקבל $\sum_{cyc}y^2z^2\geq\sum_{cyc}yzx^2$.

זהו מחצית הסכום של אי-שוויונים מסוג $x^2z^2+x^2y^2\geq 2yzx^2$, שהם מתקבלים מאי-שוויון ברור $\left(xz-xy\right)^2\geq 0$.

ב. נחבר את האגפים השמאליים של סעיף א' וסעיף ב'.

$$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{a^2-a+1}=\frac{2a^2+2}{a^4+a^2+1}$$

לכן

$$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{a^2-a+1}=\frac{2a^2+2}{a^4+a^2+1}$$

לכן

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+a+1}+\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-a+1}=\sum_{cyc}\frac{2a^2+2}{a^4+a^2+1}=\sum_{cyc}\left(2-\frac{2a^4}{a^4+a^2+1}\right)=$$

$$=6-2\cdot\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^4+a^2+1}$$

אבל $\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^4+a^2+1}=\sum_{cyc}\frac{1}{1+a^{-2}+a^{-4}}=\sum_{cyc}\frac{1}{1+x+x^2}\geq 1$ לפי סעיף א' (כאשר $x=a^{-2},\ y=b^{-2},\ z=c^{-2}$), ולכן

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+a+1}+\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-a+1}=6-2\cdot\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^4+a^2+1}\leq 6-2=4.$$

בסעיף א' כבר הוכחנו, שהמחובר הראשון באגף שמאלי הוא לפחות 1. לכן המחובר השני הוא לכל היותר 3. מש"ל.

3. נגדיר סדרה: $x_0=5$, $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$. הוכח\י כי $45<x_{1000}<45.1$.

פתרון. נעלה בריבוע: $x_{n+1}^2=x_n^2+2+\frac{1}{x_n^2}$.

$$x_{1000}^2=x_0^2+\left(x_1^2-x_0^2\right)+\left(x_2^2-x_1^2\right)+...+\left(x_{1000}^2-x_{999}^2\right)=$$

$$=5^2+2000+\left(\frac{1}{x_0^2}+....+\frac{1}{x_{999}^2}\right)>2025$$

לכן $x_{1000}>\sqrt{2025}=45$.

באופן דומה ניתן להוכיח כי

$$x_{100}^2=x_0^2+\left(x_1^2-x_0^2\right)+\left(x_2^2-x_1^2\right)+...+\left(x_{100}^2-x_{999}^2\right)=$$

$$=5^2+200+\left(\frac{1}{x_0^2}+....+\frac{1}{x_{999}^2}\right)>225$$

ולכן $x_{100}=\sqrt{225}=15$. כעת נעריך את הזנב:

$$\frac{1}{x_0^2}+....+\frac{1}{x_{999}^2}<\frac{100}{x_0^2}+\frac{900}{x_{100}^2}<\frac{100}{5^2}+\frac{900}{15^2}=4+4=8$$

לכן $x_{1000}^2 = 2025 + \left(\frac{1}{x_0^2} + ... + \frac{1}{x_{999}^2} \right) < 2025 + 8 = 2033$.

אבל $45.1^2 = 2025 + 90 \cdot 0.1 + 0.01 = 2034.01$. לכן $x_{1000} < 45.1$.

הערה. ניתן לנחש כי $x_n \approx \sqrt{25 + 2n}$ אם מחליפים את כלל הנסיגה $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n}$ במשוואה דיפרנציאלית $\frac{df}{dt} = \frac{1}{f}$ כלומר $f \cdot df = dt$ כלומר $\frac{f^2}{2} = t + const$ כלומר $f = \pm\sqrt{2t + c}$. כלל נסיגה הוא לא בדיוק משוואה דיפרנציאלית, אבל זה דומה.
אחרי שניחשת כי $x_n \approx \sqrt{25 + 2n}$ נשאלת השאלה איך להוכיח משהו ולהפוך את זה לאי-שוויונים מדויקים. כעת מתבקש להחליף את x_n ב-x_n^2, ואז אפשר להגיע לפתרון כלשהו, כמו למשל הפתרון שהצגנו.

4*. בהינתן $a,b,c,d \geq 0$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 6$.
הוכח\י כי $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+d^2} \geq 2$.

פתרון. מקרי שוויון שניתן לנחש: $a = b = c = d = 1$, וגם $a = b = c = \sqrt{2},\ d = 0$.

המהלך הבא שומר על השגת השוויון:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{1+a^2} = \sum_{cyc} \frac{(bc+cd+bd)^2}{(bc+cd+bd)^2(1+a^2)} \overset{(*)}{\geq} \frac{\left(\sum_{cyc}(bc+cd+bd)\right)^2}{\sum_{cyc}(bc+cd+bd)^2(1+a^2)} \overset{?}{\geq} 2$$

הערה חשובה. במעבר $(*)$ השוויון מתקבל כאשר

$$\frac{1}{(bc+cd+bd)(a^2+1)} = \frac{1}{(ac+cd+ad)(b^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{(ab+bd+ad)(c^2+1)} = \frac{1}{(ab+bc+ac)(d^2+1)}$$

זה נכון לא רק כאשר $a = b = c = d = 1$, אלה גם $a = b = c = \sqrt{2},\ d = 0$.
הקרואים מתבקשים לבדוק שזה נכון.

לכן מספיק להוכיח כי $\left(\sum_{cyc}(bc+cd+bd)\right)^2 \geq 2\sum_{cyc}(bc+cd+bd)^2(1+a^2)$.

כלומר, $12^2 \geq 2\sum_{cyc}(bc+cd+bd)^2(1+a^2)$.

$$72 \ge \sum_{cyc} \left(bc+cd+bd\right)^2 \left(1+a^2\right)$$

נסמן

$$a+b+c+d=4u \ , \ \ ab+ac+ad+bc+bd+cd=6v^2,$$

$$abc+abd+acd+bcd=4w^3 \ , \ \ abcd=t^4$$

אצלנו כמובן $v=1$ אבל יתכן שעוד מעט נרצה לעשות הומוגניזציה ולוותר על התנאי.

$$\sum_{cyc}\left(bc+cd+bd\right)^2\left(1+a^2\right)=\sum_{cyc}\left(b^2c^2+c^2d^2+b^2d^2+2bcd\left(b+c+d\right)\right)\left(1+a^2\right)=$$

$$=\sum_{cyc}\left(\begin{array}{r} b^2c^2+c^2d^2+b^2d^2+2bcd\left(b+c+d\right)+a^2b^2c^2+a^2c^2d^2+a^2b^2d^2+ \\ +2abcd\left(ab+ac+ad\right) \end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{sym}a^2b^2+2\sum_{cyc}bcd\left(4u-a\right)+3\sum_{cyc}a^2b^2c^2+2abcd\cdot 12=$$

$$=\left(72v^4-4\left(\sum_{cyc}a^2\left(bc+bd+cd\right)+3abcd\right)\right)+32w^3u-8t^4+$$

$$+3\left(\left(\sum_{cyc}abc\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{sym}a^2b^2cd\right)+24\cdot t^4=$$

$$=72-4\left(16uw^3-4t^4+3t^4\right)+32w^3u-8t^4+3\left(16w^6-12t^4\right)+24\cdot t^4=$$

$$=72-4\left(16uw^3-t^4\right)+32w^3u-8t^4+48w^6-12\cdot t^4=72+48w^6-32uw^3-16t^4$$

צ"ל כי $72+48w^6-32uw^3-16t^4\le 72$, כלומר $48w^6\le 32uw^3+16t^4$.

$$\boxed{3w^6\le 2uv^2w^3+v^2t^4}$$

במקרה שלנו נתון כי $v=1$ אבל זה חייב להתקיים תמיד. אי-שוויון זה הוא לא מסקנה של אי-שוויון הממוצעים או מק-לורין או ניוטון, כי השוויון מתקיים ב-5 נקודות, ובאי-שוויוני ממוצעים שונים אי-שוויון מתקיים רק במרכז.

על מנת להוכיח את זה, נפתח סוגריים:

$$\frac{3}{16}\left(\sum_{cyc}abc\right)^2\le\frac{2}{4\cdot 6\cdot 4}\sum_{cyc}a\cdot\frac{1}{4}\sum_{sym}ab\cdot\sum_{cyc}abc+\frac{1}{6}abcd\cdot\frac{1}{4}\sum_{sym}ab$$

$$\frac{3}{16}\left(\sum_{cyc}a^2b^2c^2+\frac{1}{2}\sum_{sym}a^2b^2cd\right)\le$$

$$\le\frac{2}{4\cdot 6\cdot 4}\left(\sum_{cyc}a^2\left(b+c+d\right)+3\sum_{cyc}abc\right)\cdot\sum_{cyc}abc+\frac{1}{24}\sum_{sym}a^2b^2cd=$$

$$=\frac{1}{48}\left(\sum_{sym}a^3b^2c+3\sum_{cyc}a^3bcd+\frac{1}{2}\sum_{sym}a^2b^2cd\right)+$$

$$+\frac{1}{16}\left(\sum_{cyc}a^2b^2c^2+\sum_{cyc}a^2b^2cd\right)+\frac{1}{24}\sum_{sym}a^2b^2cd$$

נכפיל ב-48

$$9\left(\sum_{cyc}a^2b^2c^2+\frac{1}{2}\sum_{sym}a^2b^2cd\right)\le\left(\sum_{sym}a^3b^2c+3\sum_{cyc}a^3bcd+\frac{1}{2}\sum_{sym}a^2b^2cd\right)+$$

$$+3\left(\sum_{cyc}a^2b^2c^2+\frac{1}{2}\sum_{sym}a^2b^2cd\right)+2\sum_{sym}a^2b^2cd$$

לאחר כינוס איברים דומים

$$6\sum_{cyc}a^2b^2c^2+\frac{1}{2}\sum_{sym}a^2b^2cd\le\sum_{sym}a^3b^2c+3\sum_{cyc}a^3bcd.$$

זה מתחלק לשני אי-שוויונים:

$$6\sum_{cyc}a^2b^2c^2\le\sum_{sym}a^3b^2c$$

$$\frac{1}{2}\sum_{sym}a^2b^2cd\le3\sum_{cyc}a^3bcd$$

הראשון מתקבל מסכום סימטרי של אי-שוויונים $2a^2b^2c^2\le a^3b^2c+c^3b^2a$

והשני מסכום הסימטרי של אי-שוויונים $2a^2b^2cd\le a^3bcd+ab^3cd$.

5*. בהיתן $a,b,c,d>0$, $a+b+c+d=4$,

הוכח\י כי $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\ge\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+1$.

פתרון. נניח כי $a=\max\left(a,b,c,d\right)$, ונסמן $f\left(a,b,c,d\right)=\sum_{cyc}\left(\frac{4}{a}-3a^2-1\right)$.

נשתמש בשיטת **ערבוב משתנים**. (אין צורך להיבהל מהמילה, אנחנו נראה מהי השיטה.)

ניתן להניח כי $a\ge1$, ו-$b+c+d\le3$.

$$f\left(a,b,c,d\right)-f\left(a,\frac{b+c+d}{3},\frac{b+c+d}{3},\frac{b+c+d}{3}\right)=$$

$$=4\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}-\frac{3}{\left(b+c+d\right)/3}\right)-3\left(b^2+c^2+d^2-3\left(\frac{b+c+d}{3}\right)^2\right)=$$

$$=4\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}-\frac{9}{b+c+d}\right)-3\left(b^2+c^2+d^2-\frac{\left(b+c+d\right)^2}{3}\right)=$$

$$= 4\cdot\frac{(bc+bd+cd)(b+c+d)-9bcd}{bcd(b+c+d)} - 2\left(b^2+c^2+d^2-bc-cd-bd\right) =$$

$$= 4\cdot\frac{\sum_{cyc}\left(b^2c+b^2d-2bcd\right)}{bcd(b+c+d)} - 2\sum_{cyc}\left(b^2-bc\right)$$

נוכיח שזה ביטוי אי-שלילי. כאן סכום ציקלי הולך על b,c,d ללא a.

$$(*)\quad \sum_{cyc}\left(b^2c+b^2d-2bcd\right) \geq \frac{16bcd\sum_{cyc}\left(b^2-bc\right)}{\left(b+c+d\right)^2}$$

נסמן $bcd=w^3$, $bc+cd+bd=3v^2$, $b+c+d=3u$.

האי-שוויון (*) הומוגני. כאשר מבטאים אותו ב-u,v,w הוא ליניארי ב-w^3, כלומר מספיק לבדוק אותו כאשר $w^3\to 0$ (שזה מקרה ברור) או כאשר $b=c=1$.

$$2+2d+2d^2-6d \geq \frac{16d\left(d^2+2-1-2d\right)}{\left(2+d\right)^2}.$$

$$\left(2+d\right)^2 2\left(1-d\right)^2 \geq 16d\left(d^2-2d+1\right)$$

$$\left(2+d\right)^2 \geq 8d$$

$$\left(2-d\right)^2 \geq 0$$

שזה נכון. לכן (*) מתקיים.

$$f\left(a,b,c,d\right) - f\left(a,\frac{b+c+d}{3},\frac{b+c+d}{3},\frac{b+c+d}{3}\right) =$$

$$= 4\cdot\frac{\sum_{cyc}\left(b^2c+b^2d-2bcd\right)}{bcd(b+c+d)} - 2\sum_{cyc}\left(b^2-bc\right) \geq$$

$$\geq 4\cdot\frac{\left(\frac{16bcd\sum_{cyc}\left(b^2-bc\right)}{\left(b+c+d\right)^2}\right)}{bcd(b+c+d)} - 2\sum_{cyc}\left(b^2-bc\right) = \frac{64\sum_{cyc}\left(b^2-bc\right)}{\left(b+c+d\right)^3} - 2\sum_{cyc}\left(b^2-bc\right) =$$

$$= \frac{2\sum_{cyc}\left(b^2-bc\right)}{\left(b+c+d\right)^3}\cdot\left(32-\left(b+c+d\right)^3\right) \geq \frac{\sum_{cyc}\left(b-c\right)^2}{\left(b+c+d\right)^3}\cdot\left(32-27\right) \geq 0$$

לכן מספיק לבדוק את המקרה בו $b=c=d$, ו- $a=4-3d$.

$$\frac{1}{4-3d}+\frac{3}{d}\geq\frac{3}{4}\left(\left(4-3d\right)^2+3d^2\right)+1$$

$$4\cdot\frac{3\left(4-3d\right)+d}{d\left(4-3d\right)}\geq 3\left(16-24d+12d^2\right)+4$$

$$\frac{12-8d}{4d-3d^2}\geq 13-18d+9d^2$$

$$12-8d\geq 52d-72d^2+36d^3-39d^2+54d^3-27d^4$$

$$12-60d+111d^2-90d^3+27d^4\geq 0$$

$$4-20d+37d^2-30d^3+9d^4\geq 0$$

$$\left(2-5d+3d^2\right)^2\geq 0.$$

מש"ל.

שאלה לקוראים: מתי מתקבל שוויון?