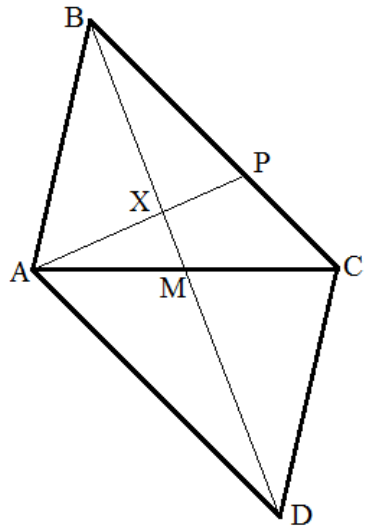
תרגיל 15

1. במשולש ABC, נקודה P על BC, ונקודה M היא אמצע AC. נניח כי AP, BM נחתכים בנקודה X. בטא\י את AX / XP ואת BX / XM באמצעות $BP / PC = k$.



פתרון ראשון. יהיה D שיקוף של B יחסית ל-M. אז ABCD מקבילית. משולשים XBP, XAD דומים.
מכאן: $\frac{AX}{XP}=\frac{AD}{BP}=\frac{BC}{BP}=1+\frac{PC}{BP}=1+\frac{1}{k}$, וגם $\frac{XD}{BX}=\frac{AD}{BP}=\frac{BC}{BP}=\frac{BP+PC}{BP}=1+\frac{1}{k}$, אבל הרי $XD=XM+MD=XM+BM=2XM+BX$,
כלומר $2\frac{XM}{BX}+1=\frac{2XM+BX}{BX}=\frac{XD}{BX}=1+\frac{1}{k}$,
לכן $2\frac{XM}{BX}=\frac{1}{k}$, ובכן $\frac{BX}{XM}=2k$.

פתרון שני. נניח מסות בקודקודי המשולש: בקודקודים A, C נניח מסה k, ובקודקוד B נניח מסה 1. את מרכז המסה G של שלושת המסות ניתן למצוא בשתי דרכים שונות:
(א) קודם ניקח מרכז מסה של A ו-C, תהיה מסה $2k$ בנקודה M, ומסה 1 בנקודה B, ולכן מרכז מסה G נמצא על קטע BM ומחלק אותו ביחס $\frac{BG}{GM}=\frac{2k}{1}$.
(ב) קודם ניקח מרכז מסה של B, C ונקבל מסה $k+1$ בנקודה P, ומסה k בנקודה A, ולכן G נמצא על AP ומחלק אותו ביחס $\frac{AG}{GP}=\frac{1+k}{k}$.
היות ו-G נמצאת על AP, BM כמו X אז G היא בעצם X.
כלומר בעצם חישבנו את היחסים.

2. ABCD מרובע קמור, ובו $AB+CD\le BC$. יהיה M אמצע AD. הוכח\י כי הזווית BMC אינה חדה. עבור איזה משולשים הזווית BMC תהיה ישרה?

פתרון. תהיה נקודה E שיקוף של B ביחס ל-M. אז DE = AB, הרי ABDE מקבילית.
לכן את אי-השוויון הנתון ניתן לרשום $DE+CD\le BC$. לכן $CE\le BC$.
ובכן במשולש BCE הצלע BC גדולה או שווה ל-CE, כלומר C נמצא בחצי מישור של E ביחס לאנך האמצעי של צלע BE, לכן הזווית BMC אינה חדה.
על מנת שהזווית תהיה ישרה, כל אי-השוויונים שרשמנו חייבים להפוך לזהויות, כלומר $CE=BC$, וגם $CE=DE+CD=AB+CD=BC$.
בעצם הסקנו את הכול משני אי-שוויונים: אי-שוויון הנתון $AB+CD\le BC$ ואי-שוויון המשולש $CE\le DE+CD$. המסקנה היא, שבשביל הזווית הישרה, אי-שוויון הנתון צריך להיות שוויון, $AB+CD=BC$, ובנוסף D צריך להיות על CE. לפי הגדרה של E, התנאי השני יתקיים אך ורק כאשר $AB\parallel CD$.
הערה. באופן דומה ניתן לפתור שאלה 4 מתחרות הערים 34, עיקרית, כיתות י"א-י"ב.

3. נתון משולש ABC. בתוכו נבחרה נקודה K. מנקודה K מורידים אנכים לצלעות המשולש. עקבי האנכים הם P, Q, R על BC, AC, AB בהתאמה. 'P, סימטרית ל-P ביחס לאמצע הצלע BC, באופן דומה מוגדרים 'Q, 'R.

א. הוכח\י כי האנכים מ-'P , 'Q , 'R לצלעות BC, AC, AB נפגשים בנקודה אחת. הנקודה הזאת תסומן $f(K)$ (ניתן לבנות $f(K)$ בשיטה שהסברנו לכל נקודה K, כמובן שהעתקה f תלויה בבחירת המשולש ABC).

ב. הוכח\י, שלכל שלוש נקודות K, L, M הישר שעובר דרך K ו-$f(K)$, הישר שעובר דרך L ו-$f(L)$, והישר שעובר דרך M ו-$f(M)$ נפגשים בנקודה אחת.

פתרון. תהיה O מרכז המעגל החוסם של ABC. נגדיל לכל נקודה K נקודה *K שהיא שיקוף של K ביחס ל-O. עקבי האנכים מנקודות K, *K לישר BC סימטריים ביחס לאמצע צלע BC, הרי עקב האנך מ-O ל-BC הוא אמצע הצלע, והטלה של קטע לישר מעבירה את אמצע הקטע לאמצע הקטע. לכן *K נמצא על האנך מ-'P ל-BC.

באופן דומה *K נמצא על האנך מ-'Q ל-AC ועל האנך מ-'R ל-AB. זה פותר את סעיף א': האנכים של סעיף א' נפגשים בנקודה *K. לכן $f(K) = K^*$. בנוסף רואים מכאן שהישר המחבר את K ל-$f(K)$ עובר דרך O. דבר דומה ניתן להגיד על הישר שעובר דרך L ו-$f(L)$, והישר שעובר דרך M ו-$f(M)$: כולם עוברים דרך O, לכן כולם נפגשים בנקודה אחת.

4. נתון מרובע חסום ABCD, שאלכסוניו AC, BD נפגשים ב-E והמשכי צלעותיו AD, BC נפגשים ב-F. אמצעי הצלעות AB, CD הם G, H בהתאמה. הוכח כי EF משיק ב-E למעגל שעובר דרך E, G, H בהתאמה.

פתרון. נניח יהיו M, N נקודות סימטריות ל-E ביחס ל-G, H בהתאמה. זה כמו לעשות הומותטיה עם מקדם 2 ומרכז E לנקודות G, H. מספיק להוכיח שהמעגל MEN משיק לישר EF בנקודה E. כעת ניתן למחוק נקודות H, G ולצייר ציור חדש עם נקודות M, N במקום. נקודות M, N מוגרות על ידי מקבילות AEMB, CEDN ולכן יותר נוח לחשב זוויות עם M, N מאשר עם G, H.

נניח שבציור שלנו C נמצאת בין F ל-B (אחרת נחליף שמות של נקודות).

בגלל המקבילות MAF, BDF שוות. באופן דומה הזוויות ACF, MBF שוות. מצד שני הזוויות ACF, BDF שתיהן משלימות את הזוויות השוות ACB, ADB בהתאמה ל-180°, לכן גם הן שוות. לכן כל הזוויות MAF, BDF, ACF, MBF שוות.

נעשה העתקה ϕ שהיא הרכבה של שיקוף ביחס לחוצה הזווית של AFB והומותטיה עם מרכז ב-F, כזאת של $\phi(A)=C$ שתעביר את A ל-C. משוויון הזוויות BAF, DCF רואים כי $\phi(B)=D$.

משוויון הזוויות MAF, BDF, ACF, MBF רואים כי $\phi(M)=E$.

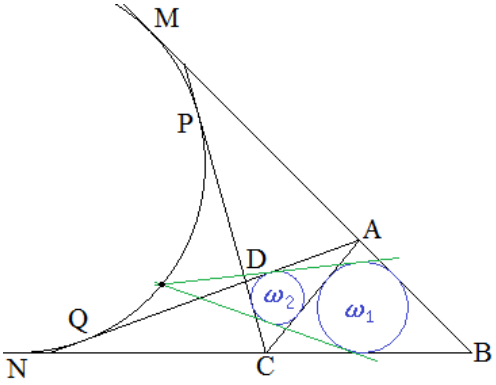
משוויון הזוויות FCN = CBD = CAD = FDN רואים כי $\phi(E)=N$.

נזכיר, שהעתקה הקרניים $FX, F\phi(X)$ סימטריים ביחס לאותו הקו (חוצה זווית של ABF) ויחס האורכים הוא $\frac{FX}{F\phi(X)}$ לא תלוי ב-X. לכן הקניים FM, FN מתלכדות, ובנוסף $\frac{FM}{FE}=\frac{FE}{FN}$, כלומר $FM\cdot FN=FE^2$, לכן FE משיק למעגל MEN. מש"ל.

5. ABCDE מחומש קמור בו BC מקביל ל-AE, ובנוסף AB = BC + AE, $\sphericalangle CDE = \sphericalangle ABC$. תהיה M אמצע CE, O מרכז המעגל החוסם של BCD. בתנאי שהזווית DMO ישרה, הוכח\י $\sphericalangle CDE = 2\sphericalangle BDA$.

פתרון. רעיון חשוב בשאלה זאת, שחוזר על עצמו גם בהרבה שאלות גיאומטריות אחרות, הוא למצוא רביעיות של נקודות שנמצאות על מעגל אחד. ברגע שמוצאים רביעייה מסוג זה, ניתן להשתמש במעגל על מנת לחשב זוויות.
תהיה K נקודה סימטרית ל-D ביחס ל-M, T נקודה סימטרית ל-B ביחס ל-M.
היות ו-MO מאונך לישר KMD, אז O נמצאת באותו מרחק מ-O כמו D. אבל O הוא מרכז המעגל החוסם של BCD, ומרחק OD הוא רדיוס של מעגל זה, לכן גם K נמצא על המעגל. ובכן, הנקודות B, C, D, K על מעגל אחד. לכן $\sphericalangle BKC = \sphericalangle BDC$.
מצד שני, $\sphericalangle BKC = \sphericalangle EDT$ בגלל סימטריה ביחס לנקודה M.
לכן $\sphericalangle EDT = \sphericalangle BDC$. נוסיף $\sphericalangle BDE$ לשני האגפים ונקבל $\sphericalangle CDE = \sphericalangle BDT$.
אבל נתון כי $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDE$ ולכן $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BDT$.
אבל $\sphericalangle BAT + \sphericalangle ABC = 180^\circ$, לכן $\sphericalangle BAT + \sphericalangle BDT = 180^\circ$, לכן ABDT הוא מרובע חסום. זאת אומרת ש-$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ATB$.
צריך להוכיח כי $\sphericalangle CDE = 2\sphericalangle BDA$, וזה כמו להוכיח כי $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BTA$, אבל $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABT + \sphericalangle TBC = \sphericalangle ABT + \sphericalangle BTA$, לכן בעצם מספיק להראות כי $\sphericalangle ABT = \sphericalangle BTA$. זה כמו להוכיח ש-AT = AB.
אבל זה די ברור: AT = AE + ET = AE + BC =AB.

6*. ABCD מרובע קמור בו $AB \neq BC$. מעגלים חסומים במשולשים ABC, ADC יסומנו ω_1 , ω_2 בהתאמה. נניח שקיים מעגל ω שמשיק להמשכי קטעים BA, BC מעבר לנקודה A, C בהתאמה, ומשיק גם לישרים CD, AD. הוכח כי המשיקים החיצוניים המשותפים למעגלים ω_1 , ω_2 נפגשים על המעגל ω.



פתרון. נניח כי M, N, P, Q הן נקודות השקה של ω עם AB, BC, CD, DA בהתאמה. אנו נשתמש מספר פעמים בטענה: שני המשיקים מנקודה למעגל שווים. לכן

$$AB + AD = AB + AQ - DQ =$$
$$= AB + AN - DQ = BN - DP =$$
$$= BC + CN - DP = BC + CP - DP =$$
$$= CB + CD$$

ובכן, AB + AD = BC + CD.
במילים אחרות AD – DC = BC – AB
נסמן ב-X, Y נקודות השקה של ω_1 , ω_2 בהתאמה ל-AC. אז עם שימוש חוזר של אותה טענה, קל לבדוק כי AY – YC = AD – DC = BC – AB = AX – BX.
נסמן ב-ω' מעגל חסום מבחוץ לצלע AC של משולש ABC. מחשבון משיקים דומה, קל לראות שגם ω' משיק ל-AC בנקודה Y. באופן דומה, מעגל החסום מבחוץ לצלע AC של משולש ACD, שיסומן ב-ω'', משיק ל-AC בנקודה X (תרגיל לקורא).

נסובב את התמונה כך, שהקו AC יעבור מצפון לדרום, נקודה B תהיה הנקודה מזרחית יותר מאשר AC, ו-D נקודה מערבית יותר. נסמן ב-'X, Y, Z את הנקודות המזרחיות שיותר של $\omega, \omega_2, \omega_1$ בהתאמה, וב-X, 'Y, 'Z התאמה את הנקודות המערביות ביותר שלהן (זה לא סותר את ההגדרה הקודמת של X, Y). אז 'XX, 'YY, 'ZZ הם קטרים של המעגלים המתאימים.

הומותטיה מסוימת אם מקדם שלילי ומרכז ב-D תעביר את ω_2 ל-ω, לכן 'Y, D, Z נמצאות על ישר אחד. הומותטיה מסוימת אם מקדם חיובי ומרכז ב-D תעביר את ω_2 ל-ω_1, לכן X, 'Y, D נמצאות על ישר אחד. לכן X, 'Y, Z על ישר אחד.

הומותטיות עם מקדם חיובי ומרכזה ב-B מעבירות את ω_1 ל-ω וגם ל-ω', לכן הנקודות B, 'X, Y, Z על ישר אחד.

נתבונן כאת בהומותטיה עם מקדם חיובי שמעבירה את ω_2 ל-ω_1. המרכז שלה זו נקודת חיתוך של שני המשיקים המשותפים החיצוניים, שדיברו עליה בניסוח השאלה. מצד שני, הישרים שמחברים את הנקודות המזרחיות של המעגלים 'X, Y ואת הנקודות המערביות של המעגלים X, 'Y נמצאות על עוברות דרך מרכז ההומותטיה, כלומר הנקודה היא גם נקודת המפגש של 'XY, 'YX, וזו נקודה Z.

חשוב לציין, שהמשיקים החיצוניים באמת נחתכים: אם המעגלים ω_1, ω_2 היו באותו גודל, ומשיקות לקטע AC בנקודות סימטריות ביחס לאמצע AC, אזי ABCD מקבילית, הרי התמונה סימטרית ביחס לאמצע AC, ולכן מעגל ω לא קיים.

דבר נוסף שחשוב לציין הוא שנקודת חיתוך של הישרים 'XY, 'YX מוגדרת ביחידות, כי הנקודות X, 'X, Y, 'Y לא על אותו קו: הרי 'XX, 'YY אנכים ל-AC בנקודות שונות.