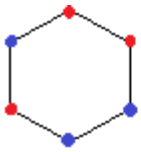
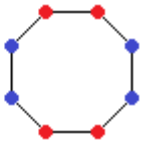
תרגיל 14

1. קודקודי מצולע משוכלל בעל n קודקודים נצבעו בשני צבעים, אדום וכחול. עבור איזה n בהכרח נוצר משולש שווה-שוקיים, שקודקודיו אדומים או כחולים?

תשובה. עבור $n=5,7$ או כל $n>8$.

פתרון. כאשר $n\le 4$ ניתן לצבוע כך, שלא יהיו אפילו 3 נקודות באותו צבע.

עבור $n=6,8$ הדוגמאות בציור. במצביע של משושה יש רק משולש כחול אחד, ורק משולש אדום אחד, ושניהם אינם שווי שוקיים. בצביעה של מתומן יש מלבן אדום ומלבן כחול, שאף אחד מהם לא ריבוע, ואם מורידים קודקוד של מלבן, מקבלים משולש שאינו שווה שוקיים.

עבור $n=5$ יש צבע שמכיל 3 קודקודים, וזה נותן משולש, וכל משולש שנוצר מקודקודי מחומש משוכלל הוא שווה צלעות (הרי במחומש משוכלל יש רק שני מרחקים בין קודקודים: צלע ואלכסון.

מעכשיו נשאר לדבר על המקרים של $n\ge 7$ ובנוסף $n\ne 8$. נניח לרגע, שהקודקודים 3 ו-5 באותו צבע, נגיד אדומים. אז קודקוד 4 הוא כחול (או שיש משולש שווה שוקיים 3,4,5) גם קודקוד 1 הוא כחול (או שיש משולש שווה-שוקיים אדום 1,3,5) וגם קודקוד 7 הוא כחול (או שיש משולש שווה שוקיים אדום 3,5,7) ואז יש משולש שווה שוקיים כחול 1, 4, 7. ובכן, אם 3, 5 הם באותו צבע אז יש משולש שווה שוקיים בצבע אחד.

במקום 3, 5 היה אפשר לקחת כל זוג קודקודים באותו צבע במרחק 2.

נסיים את ההוכחה עבור $n=7$. בשרשרת 1,3,5,7,2,4,6,1 יש מספר אי-זוגי של מעברים, בהתחלה ובסוף יש אותו צבע (של 1) לכן יש מעבר שבו הצבע לא מתחלף, לכן יש שני קודקודים באותו צבע במרחק 2 זה מזה, ולכן יש משולש בצבע אחד.

נסיים את ההוכחה עבור $n\ge 9$. כבר הוכחנו, שאם יש שני קודקודים במרחק 2, אז יש משולש שווה שוקיים בצבע אחד. לכן בשרשרת 1,3,5,7,9 ניתן להניח שהצבע שונה בכל זוג איברים סמוכים. לכן 1,5,9 באותו צבע וזה משולש שווה שוקיים.

2. מלבן $m\times n$ חולק לצורות כמו בציור.
הוכח\י כי mn מתחלק ב-8.

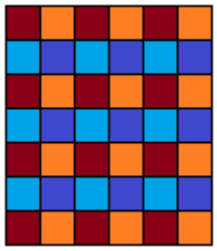


פתרון. כמובן ששטח מתחלק ב-4, כי המשבצות חולקו לרביעיות. לכן, אם נשתמש בצביעת שח רגילה, יהיה אותו מספר של משבצות שחורות ולבנות. בכל צורה הצבע של המשבצת המרכזית שונה מצבעים של שלוש משבצות אחרות. לכן הפרש בין כמות המשבצות השחורות לכמות המשבצות הלבנות זה 2 או 2-. אם נסכם את זה על פני כל הצורות בחלוקה, אז נקבל

אפס, לכן יש אותה כמות של צורות שהן בעיקר שחורות כמו כמות הצורות שהן בעיקר לבנות. לכן כמות הצורות זוגית, ולכן השטח מתחלק ב-8.

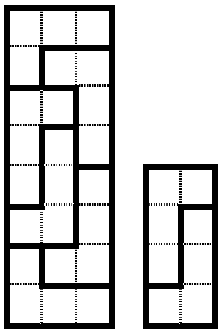
3. עבור איזה ערכים של m,n ניתן לפרק מלבן $m\times n$ לפינות של 4 משבצות, כמו בציור?





תשובה. כאשר $m,n>1$ ובנוסף mn מתחלק ב-8.

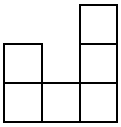
פתרון. נצבע את הלוח ב-4 צבעים: את השורות הזוגיות בכחול, את האי-זוגיות באדום, את המשבצות שסכום של מספר שורה ומספר העמודה זוגי בצבע כהה, וכאשר זה אי-זוגי אז בצבע בהיר. בכל צורה יש צבע שחוזר על עצמו: הצבע של המשבצת הפינתית והמשבצת הרחוקה ממנה. אם הצבע הזה כהה, אז שתי המשבצות האחרות בהירות, וגם להפך. שטח המלבן זוגי (אפילו מתחלק ב-4) לכן יש לו צלע זוגית. ללא הגבלת הכלליות ניתן להניח, כי כמות העמודות זוגית. לכן יש אותה כמות של אדום כהה ואדום בהיר. נשים לב, שבכל צורה יש כמות אי-זוגית של משבצות אדומות. מכאן קל להבין, שהפרש בין כמות משבצות אדומות בהירות ומשבצות אדומות כהות הוא ± 1, וסכום של מספרים אלה על כל הצורות חייב להתאפס, לכן מספר הצורות הוא זוגי. לכן השטח מחלק ב-8.



נניח כעת שהשטח מתחלק ב-8. האם ניתן לחלק את הלוח?בציור יש דוגמאות עבור 3×8 , 2×4. משני מלבנים 2×4 ניתן להרכיב גם מלבן 2×8, וגם $2k\times 8$. ביחד אם מלבן 3×8 ניתן להרכיב כל מלבן $m\times 8$, כל עוד $m>1$. לכן אפשר גם להרכיב $m\times 8\ell$ כל עוד $m>1$. ובכן, אם יש צלע שמתחלקת ב-8 וצלע אחרת היא לא אחד, אפשר להרכיב.

אם אף צלע לא מתחלקת ב-8, אבל שטח מתחלק ב-8, אז יש צלע שמתחלקת ב-4 וצלע אחרת זוגית, לכן המלבן מתחלק למלבנים 2×4 ולכן גם אז ניתן להרכיב אותו.

4. עבור איזה ערכים של m,n ניתן לפרק מלבן $m\times n$ לצורות קרס של 6 משבצות, כמו בציור?



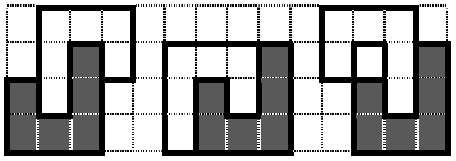
הערה. שאלה זו הופיע ב-IMO בשנת 2004.

פתרון. קל לראות, שמשני קרסים אפשר להרכיב מלבן 3×4, לכן קל להרכיב $m\times n$ אם $3|m$ וגם $4|n$.

בנוסף, קל לראות כי אם $12|m$ אז ניתן לבנות גם מלבן $m\times 3$ וגם $m\times 4$. לכן ניתן לבנות גם מלבן $m\times n$ כל עוד $n=3a+4b$, כאשר $a,b\geq 0$ שלמים. זה מעורר שאלה: איזה

מספרים טבעיים ניתן לרשום בתור סכומים של 3 ו-4? המספרים מתחלקים ל-3 סוגים: $3k,\ 3k+1,\ 3k+2$. כל מספר מסוג $3k$ מתקבל (אפילו בלי 4), כל מספר מסוג $3k+1$ החל מ-4 מתקבל (כלומר כולם חוץ מ-1), כי עבור מספר $3k+1$ חייבים לקחת את 4 לפחות פעם אחד, וכל מספר מסוג $3k+2$ החל מ-8 מתקבל (כלומר כולם חוץ מ-2, 5) כי חייבים להשתמש ב-4 לפחות פעמיים. ובכן, כאשר $12|m$ ניתן לרצף כל מלבן $m\times n$ כאשר $n\neq 1,2,5$.

כאשר $n=1,2,5$ אי-אפשר לרצף: עבור 1,2 אי-אפשר לשים אפילו קרס אחד, עבור 5 אם מרצפים צלע באורך 5 אז אי-אפשר להמשיך את הריצוף.



נשים לב, כי בכל ריצוף במרכז של כל קרס יש משבצת, שצריכים לכסות אותה באמצעות המשבצת הקיצונית של קרס אחר. ישנם 3 דרכים לעשות את זה (בציור). אחת הדרכים יוצר משבצת ריקה שכבר לא ניתן לכסות אותה, ובשני הדרכים האחרות רואים תופעה מעניינת: אם קרס א' מכסה את המשבצת האמצעים של קרס ב', אז קרס ב' מכסה את המשבצת האמצעית של קרס א'. זה יוצר חלוקה של קרסים לזוגות, מוכיח שבעצם אנחנו יכולים לדבר על ריצוף בשני צורות: מלבן 3×4 וצורה שנקרא לה S כמו בציור השמאלי, וגם מוכיח כי השטח של המלבן הגדול חייב להתחלק ב-12.

מבין המקרים בהם השטח מתחלק ב-12 בנינו כבר מספר מקרים. בנינו מקרה בו אחד הצלעות מתחלק ב-12 (חוץ מהמקרים בהם זה בלתי אפשרי), ובנינו מקרה שבו צלע אחת מתחלקת ב-4, וצלע אחרת מתחלקת ב-3. אם יש צלע שמתחלקת ב-4 אז או שהיא מתחלקת ב-12, או שצלע אחרת מתחלקת ב-3, לכן את המקרה בו יש צלע שמתחלקת ב-4 בדקנו. נשאר לנו המקרה שבו אין צלע שמתחלקת ב-4.
במקרה זה, אם המכפלה מתחלקת ב-12, אז כל צלע מתחלקת ב-2 אך לא ב-4.

נגיד שצורה S או מלבן 3×4 נמצאים במצב אופקי אם בכל שורה של הצורה יש 3 משבצות, ובכל עמודה יש מספר זוגי (2 או 4 משבצות), ובמצב אנכי אם להפך, בכל עמודה יש 3 משבצות. נצבע כל שורה רביעית בכחול. אז כל צורה אנכית נותנת 3 משבצות כחולות, וכל צורה אופקית מספר זוגי. סה"כ יש מספר זוגי של משבצות כחולות, כי כל שורה זוגית, לכן יש מספר זוגי של צורות אנכיות.
באותו אופן יש מספר זוגי של צורות אופקיות. לכן בסה"כ הלוח שלנו (אם השורות והעמודות זוגיות) מורכבת ממספר זוגי של צורות של 12 משבצות, לכן שטחו מתחלק ב-24, מש"ל.
הערה. ניתן לסיים את הפתרון גם עם צביעה אחת, שהיא XOR של צביעה אופקית ואנכית. אבל אז יהיה יותר קשה להבין למה זה עובד.

5. א. משבוצות של לוח אינסופי נצבעו ב-4 צבעים, כך שכל ריבוע 2×2 מכיל משבצות מכל הצבעים. הוכח\י כי יש שורה או עמודה שמכילה רק שני צבעים.
ב. משבוצות של לוח אינסופי נצבעו ב-n^2 צבעים, כך שכל ריבוע $n\times n$ מכיל משבצות מכל הצבעים. נניח בנוסף, שיש שורה שמכילה את כל הצבעים. הוכח\י כי יש עמודה שמכילה רק n צבעים.

פתרון. א. ניקח שורה כלשהי, ונניח שהיא מכילה לפחות 3 צבעים. אנו נוכיח, שבשורה זאת יש רצף של 3 משבצות, שמכיל 3 צבעים שונים. לפי התנאי, כל שני צבעים צמודים שונים. לכן, אם בכל שלישייה בשורה זאת רצופה יש 2 צבעים בלבד, אז כל שני משבצות במרחק 2 זו מזו באותו צבע. אבל אז השורה הזאת היא זברה ויש לה רק שני צבעים.
ובכן, אם שורה מסוימת עדיין לא מקיימת את התנאי הרצוי, אז יש שלישיה של משבצות רצופות בצבעים שונים: אדום, ירוק, כחול בסדר זה (בשורה שנקרא לה שורה ראשונה). לעמודות אלה נקרא שמאלית, אמצעית, וימנית בהתאמה. אז בשורה שנייה עמודה אמצעית חייבת להיות משבצת בצבע רביעי, צהוב, הרי היא שונה משלושת המשבצות בשורה הראשונה. בעמודה ימנית בשורה שנייה יש משבצת, שנמצאת בתוך ריבוע, שכבר יש בו כחול, צהוב וירוק, ולכן היא אדומה. בעמודה שמאלית בשורה שנייה, מסיבות דומות, תהיה משבצת כחולה.
באופן דומה בשורה שלישית נקבל (משמאל לימין): אדום, ירוק, כחול, ובשורה רביעית שוב כחול, צהוב, אדום. אנחנו רואים שבשלוש עמודות הללו כל שורה היא כמו שורה שבמרחק 2 ממנה. לכן בכל אחת מבין שלושת העמודות הללו יש רק שני צבעים.

ב. נתחיל מטענה פשוטה: לכל ריבוע של משבצות, בעל שתי צלעות אופקיות ושתי צלעות אנכיות באורך n, (למשל $\{(0,0),\ (0,n),\ (n,n),\ (n,0)\}$) לכל פינה יש פינה על אותו צלע שלו ובאותו הצבע.
הוכחת הטענה: נניח למשל, כי בריבוע שלקחנו בדוגמה, המשבצת $(0,0)$ אדומה והמשבצת $(0,n)$ ירוקה (כל מצב אחר הוא סימטרי למצב זה). במקרה זה נוכיח, כי $(n,0)$ אדומה וכי (n,n) ירוקה. אכן, הריבועים $[0,n-1]\times[0,n-1]$, $[1,n]\times[0,n-1]$ מכילים את כל הצבעים, ולכן אם נוריד את החלק המשותף אז נקבל שתי שורות $\{0\}\times[0,n-1]$, $\{n\}\times[0,n-1]$ שגם אמורות להכיל אותם צבעים. נסמן את קבוצת הצבעים של $\{0\}\times[1,n-1]$ ב-S_1, ואת קבוצת הצבעים של $\{n\}\times[1,n-1]$ ב-S_2. אז הוכחנו בעצם כי אדום ביחד עם S_1 הוא כמו צבע של $(n,0)$ ביחד עם S_2. באופן דומה ירוק ביחד עם S_1 זה כמו צבע של (n,n) ביחד עם S_2. מכאן מתקבלת הטענה.

נניח כי צבע X מופיע בעמודה K ברווחים קבועים של n, עד אינסוף בשני הכיוונים. במקרה זה נקרא ל-X **צבע אנכי**. קל לראות, שאז X לא מופיע בעמודות $K+1,...,K+n-1$, הרי כל ריבוע שמוכל בעמודות $K,\ K+1,\ ...\ ,\ K+n-1$ כבר מכיל צבע X בעמודה K. מצד שני, כל ריבוע שמוכל בעמודה $K+n$ מכיל צבע X, $K+1,\ ...\ ,\ K+n$ לכן בעמודה $K+n$ צבע X מופיע ברווחים קבועים של n (הרי אין רצף של n שלא מכיל צבע X ואין רצף של n שמכיל צבע X פעמיים).

באופן דומה אפשר לראות שבעמוד $K-n$ צבע X מופיע ברווחים קבועים של n, ולכן גם על עמודות $K-2n,\ K-3n,...$ וגם על עמודות $K+2n,\ K+3n,...$.

נגיד ששתי עמודות הן **מאותו סוג**, אם הפרש בין מספרי העמודות מתחלק ב-n. אז ניתן להגיד, שאם צבע מסוים אנכי, כלומר הוא מופיע בעמודה כלשהי ברווחים קבועים של n, אז זה קורה גם בכל העמודות מאותו סוג.

נשתמש כעת בנתון, שקיימת שורה (נקרא לה שורה מיוחדת), בה יש את כל ההצבעים. נגיד שצבע הוא **אופקי**, אם הוא מופיע בשורה זאת ברווחים קבועים של n, עד אינסוף בשני הכיוונים: ימינה ושמאלה. ברור שיכולים להיות לכל היותר $n-1$ צבעים אופקיים, הרי אחרת הצבעים האופקיים היו ממלאים את השורה הזאת לחלוטין ולא היה נשאר מקום לצבעים האחרים. לכן יש לפחות n^2-n+1 צבעים שאינם אופקיים.

נוכיח שכל צבע שאינו אופקי הוא צבע אנכי. אכן, אם צבע (למשל כחול) אינו אופקי, אז בשורה המיוחדת ניתן למצוא שני משבצות במרחק n זו מזו שאחד היא כחולה והשנייה בצבע אחר (נגיד לבן). נצייר ריבוע, ששני קודקודים שלו באותו צלע הם המשבצת הכחולה והמשבצת הלבנה האלה, ואז לפי הטענה שהוכחנו בהתחלה, גם שני המשבצות באותם מקומות במרחק של n שורות מהשורה המיוחדת הם באותם צבעים, כחול ולבן בהתאמה. כאשר חוזרים על השיקול הזה, רואים כי בעמודה של המשבצת הכחולה הכחול מופיע ברווחים קבועים של n, כלומר כחול הוא צבע אנכי.

ובכן, ראינו שבשורה המיוחדת (שבה יש את כל הצבעים) יש לכל היותר $n-1$ צבעים אופקיים, לכן יש לפחות n^2-n+1 אנכיים. כל צבע אנכי מופיע ברווחים של n בכל העמודות מסוג מסוים. סה"כ יש n סוגי עמודות, לכן יש סוג של עמודה שבה מופיעים n צבעים אנכיים (לפי שובך היונים). לכן יש עמודה שבה מופיעים n צבעים, והם מופיעים ברווחים קבועים של n. לכן אלה n הצבעים היחידים שיש בעמודה זאת. מש"ל.

הערה. ניתן להוכיח גם, כי בכל עמודה יש בדיוק n צבעים.

הערה. ניתן להוכיח את טענת הבעיה (אבל לא את הטענה של ההערה הקודמת) אם בשורה מסוימת יש לפחות n^2-n+1 צבעים.

6. במרחב נתונות 200 נקודות במצב כללי (אף 4 לא במישור אחד). כל שתי נקודות מחוברות בקטע ישר. הראשון צובע כל קטע באחד מ-K צבעים. לאחר מכן, השני צובע כל נקודה באחד מאותם K הצבעים. אם בסוף המשחק יש קטע שהוא ושני קצותיו צבועים באותו צבע, הראשון מנצח. אם לא, השני מנצח. הוכח שהראשון יכול להבטיח לעצמו ניצחון אם

א. $K = 7$.

ב. $K = 10$.

פתרון. א. נוכיח, שהראשון יכול לנצח אם כמות הנקודות היא לפחות 2^K. זה מספיק, כי כמות הנקודות בסעיף א' היא $2^7 = 128 < 200$.

כאשר יש צבע אחד, ו-$2 = 2^1$ נקודות, אז הכול ברור.

נניח שהוכחנו את הטענה עבור $K-1$ צבעים. כעת יש לנו 2^K נקודות, ניתן לחלק אותם לשתי מחלקות בגודל 2^{K-1}. בכל מחלקה נצבע את הקטעים ב-$K-1$ צבעים ראשונים בשיטה של הנחת אינדוקציה. כך, אם השני יחליט לא להשתמש בצבע האחרון באחת המחלקות אז הוא יפסיד, לפי הנחת האינדוקציה.

את כל הקטעים שמחברים את הנקודות של מחלקות שונות נצבע בצבע K. לכן אם השני יחליט להשתמש בצבע K בכל אחת מהמחלקות, אפילו פעם אחת, אז הוא יפסיד גם. לכן השני יפסיד בכל מקרה.

ב. נראה פתרון אפילו ל-12 צבעים ו-169 נקודות. נתבונן בזוגות (x, y) של שאריות מודולו 13 ("מישור" מעל שדה של 13 איברים). במישור זה ניתן להגדיר ישרים: קבוצות

$$\{(x, y) \mid ax + by = c\}$$

כאשר a, b לא שווים ל-0 בו-זמנית מודולו 13.

קל לראות, שלכל שתי נקודות שונות יש ישר יחיד שעובר דרכן, ושיש 14 סוגי כיוונים שונים לישרים: יש ישרים מסוג $x = c$ (הישרים האנכיים), וכל ישר אחר ניתן לכתוב בתור $y = kx + m$, כאשר k יקרא שיפוע של ישר, והוא קובע את הכיוון שלו. לכל אחד מבין 14 הכיוונים נקבע צבע משלו, כאשר נשתמש בכל הצבעים שיש ויהיו שני צבעים שנשתמש בהם פעמיים. קל לראות, שבחירת כיוון כלשהו מחלקת את 169 נקודות המישור ל-13 מחלקות, של 13 נקודות בכל מחלקה. את כל הטענות האלה מוכיחים בדיוק כמו טענות על ישרים ונקודות בגיאומטריה אנליטית של מספרים ממשיים, לכן נשאיר את זה כתרגיל לקוראים.

ובכן, אנחנו נבחר התאמה כלשהי בין 169 הנקודות במרחב לנקודות של "מישור" מודולו 13, ונצבע כל קטע שמחבר שתי נקודות במרחב בצבע שמתאים לכיוון הישר, שמחבר את הנקודות הללו במישור מודולו 13. רגע שהשחקן השני יצבע נקודות ב-12 צבעים, ויהיה צבע אחד (נקרא לו כחול) שהוא ישתמש בו עבור לפחות 14 נקודות. נצבע את נקודות המישור בהתאם. כיוון שמתאים לצבע כחול מחלק את המישור ל-13 מחלקות, ולפי שובך היונים יש שתי נקודות כחולות באותה מחלקה, כלומר שתי נקודות הללו כחולות ומחוברות בקטע כחול.