תרגיל 13

מרדף

1. א. בתוך הים נמצא פושע נקודתי במרחק d מהחוף, שמיקומו ידוע בכל רגע (ים הוא חצי מישור, חוף הוא קו ישר). על החוף נמצא שוטר נקודתי במרחק ℓ מהפושע. הפושע רץ יותר מהר מהשוטר, אבל מהירות השחייה שלו איטית ממהירות הריצה של השוטר. השוטר לא יודע לשחות. עבור איזה יחס בין מהירות השחייה של הפושע למהירות הריצה של השוטר לפושע יש סיכוי להגיע לחוף ולברוח?

ב. נניח שהפושע נמצא במרכז של אגם גדול, מהירות השחייה שלו היא רבע ממהירות הריצה של השוטר. האם הוא יכול להימלט במקרה זה?

פתרון. א. נסמן: P מיקום הפושע, S מיקום השוטר, T ההיטל של P על ישר החוף.

אם S, T מלכדים אז אין לפושע סיכוי להימלט: השוטר תמיד יוכל להישאר על היטל הפושע לחוף, וברגע שהפושע יצא, השוטר יעצור אותו.

נבדוק תחילה את האפשרות, שהפושע ישחה לכיוון נקודה Q על החוף בקו ישר, ונבדוק איזה יחס מרחקים PQ/SQ הוא מינימאלי. נניח כי d הוא מרחק מ-Q לישר PS. אז $d \le \mathrm{PQ}$, ולכן $\frac{d}{\mathrm{QS}} \le \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{QS}}$, אבל $\frac{d}{\mathrm{QS}}$ הוא קבוע ולא תלוי ב-Q (בעצם, זהו הסינוס של זווית PSQ). הערך המינימאלי מתקבל כאשר PQ מאונך ל-QS. במקרה זה המשולשים PSQ, TSP דומים. לכן במקרה זה $\frac{d}{\ell} = \frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{PS}} = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{QS}} = \frac{d}{\mathrm{QS}}$. לכן, אם היחס בין מהירות השחייה של הפושע למהירות הריצה של השוטר גדולה מ-$\frac{d}{\ell}$, אז הפושע יוכל להימלט (אם הוא ישחה בקו ישר לכיוון הנקודה Q, כאשר כיוון השחייה שלו ברגע התחלתי מאונך לכיוון בו הוא רואה את השוטר).

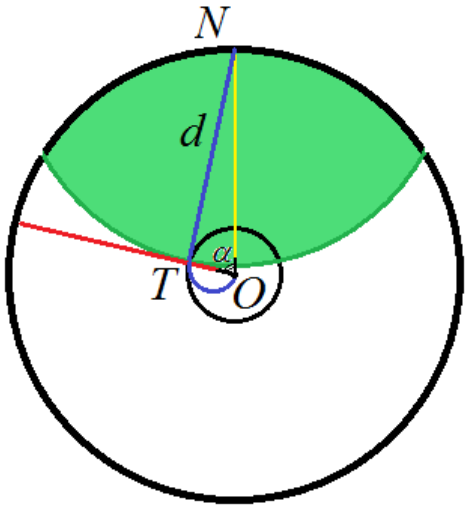
אם היחס בין המהירויות קטנה או שווה ל-$\frac{d}{\ell}$, אז הפושע לא ימלט. בשביל לעצור אותו, השוטר ירוץ לכיוון ההיטל של מיקום הפושע אל החוף. המרוץ הזה עלול להסתיים בשתי צורות: או שהשוטר יגיע להיטל של פושע אל החוף (ואז הוא כבר יישאר על ההיטל), או שהפושע יגיע קודם לחוף וימלט. אבל המקרה השני אינו אפשרי: הרי במקרה זה השוטר כל הזמן רץ לנקודה בה אמור הפושע לצאת מהמים, ויחס המרחקים הוא כזה שהשוטר אמור להגיע לנקודה זו קודם, אפילו אם הפושע שט בקו ישר.

הערה. אפשר לנסח את זה גם במונחים של מעגלי אפולוניוס. מעגל אפולוניוס של P ו-S שמתאים ליחס גדול מדי לא נוגע בחוף. מעגל אפולוניוס שמתאים ליחס קטן מדי יחתוך את החוף פעמיים. המקרה הגבולי, זה מעגל אפולוניוס שמשיק לחוף.

ב. בהתחלה הפושע יגיע למעגל שרדיוסו 0.24 מרדיוס האגם. על המעגל הזה, הוא מסוגל להתקדם עם מהירות זוויתית גדולה מזו של השוטר. לכן עם הזמן יוכל להגיע למצב בו הוא נמצא על נקודה נגדית למיקום השוטר. כעת הוא ישחה לנקודה הקרובה של החוף. הפושע צריך לעבור $0.76\cdot R$ (כש-R זה רדיוס האגם), והשוטר צריך לעבור $\pi R > 3.14\cdot R$. אבל מהירות הפושע במים היא רבע ממהירות השוטר על החוף, לכן עד שהוא יצא מהאגם השוטר יעבור רק $3.04\cdot R$, והפושע ימלט.

2. סירה פיראטית מנסה להתקרב בהפתעה באמצע הלילה לאי נקודתי. על האי יש פנס אבטחה מסתובב, שמעיר קטע באורך קבוע (שמתחיל באי), והוא מסתובב במהירות זוויתית קבועה כך שהקצה הרחוק של הקטע נע במהירות v. מה צריכה להיות המהירות של הסירה, כדי שהיא תצליח להגיע עד לאי עצמו בלי להיחשף על ידי האור של הפנס?

פתרון. נסמן את אורך הקרן של הפנס R. ברור שאם הסירה ממש איטית (למשל אם בזמן שהיא תעבור $R/2$ הפנס יעשה מעל שני סיבובים מלאים) אז אין לסירה סיכוי להגיע בלי שאור הפנס יחלוף על פניה. מצד שני, אם הסירה מאוד מהירה, למשל אם היא תוכל לעבור R לפני שהפנס ישלים סיבוב, אז היא תוכל להגיע. יש גם ערך גבולי: הסירה תוכל להגיע, בזמן שקרן הפנס יגיע אליה אבל לא יעבור אותה. בציור שלנו O זה הפנס, העיגול הגדול הוא עיגול שמרכזו O ורדיוס R (עיגול הסכנה, רק בעיגול הזה יכולים לראות את הסירה), הפיראטים נכנסים לעיגול מהנקודה הצפונית שלו N (זה לא משנה כי התמונה סימטרית), והקרן מסתובבת נגד כיוון השעון. ברור שלסירה כדאי להיכנס מיד אחרי שקרן תחלוף על פני הנקודה N. נסמן ב-v_s את מהירות הסירה. אם הסירה תשוט במעגל שרדיוסו r בניסיון להתרחק מהקרן שמתקרבת אליה, מהירות הזוויתית שלה תהיה v_s/r, כאשר מהירות הזוויתית של הקרן היא v/R. לכן אם $r < r_b = \frac{Rv_s}{v}$, הסירה תוכל להתרחק מהקרן ואפילו בו-זמנית להתקרב לפנס. ערך זה r_b יקרא רדיוס הבטיחות, ועיגול שמרכזו O ורדיוסו r_b יקרא עיגול הבטיחות (העיגול הקטן בציור). אם הסירה תצליח להיכנס לעיגול זה, היא כבר תצליח להתקרב למגדלור בלי שיראו אותה. אם הסירה מחוץ לעיגול הבטיחות, המרחק הזוויתי בינה לבין הקרן מצטמצם כל הזמן (עם מודדים את הזווית מהקרן בכיוון תנועתה, נגד כיוון השעון). יהי NT המשיק המערבי מ-N למעגל הבטיחות, כש-T



נקודת ההשקה. נצבע בירוק את כל הנקודות של עיגול הסכנה, שמרחק מהן ל-N לא עולה על $d = NT$.

אנחנו מציעים מסלול כזה (כחול בציור): בהתחלה קטע NT, אחר כך חצי-העיגול הדרומי שקוטרו OT. נבחר את v_s כך, שבזמן שהסירה תגיע ל-T במסלול המוצע, הפנס יעשה מעל סיבוב אחד (אבל פחות מסיבוב ורבע) ויגיע לנקודה שבה הוא יראה אותה שוב. קל לראות (תרגיל לקורא) שלאורך הקשת המעגלית של מסלול הפנס לא יחלוף על פני הסירה אלא ימשיך להאיר אותה. לכן אם המהירות של הסירה הייתה אפילו טיפה יותר גדולה, אז הסירה הייתה מגיע ל-O בלי שיראו אותה.

מצד שני, אם מהירות הסירה קטנה או שווה ל-v_s, אז אחרי זמן d/v_s הסירה תהיה בחלק הירוק והקרן תחלוף על כל השטח הירוק, לכן הסירה תיתפס.

ובכן, סיימנו להוכיח שהמצב שתיארנו הוא המצב הקיצוני, אבל צריך גם לחשב.

נסמן $\alpha = \sphericalangle NOT$. במצב הגבולי, בזמן שהסירה תעבור מרחק d ותגיע ל-T, קצה הקרן יעבור מרחק $(2\pi+\alpha)R$, ולכן $\frac{(2\pi+\alpha)R}{v} = \frac{d}{v_s}$.

מעגל הבטיחות הוגדר כך, שרדיוסו $OT = R\cdot\frac{v_s}{v}$, מצד שני $OT = ON\cdot\cos\alpha = R\cdot\cos\alpha$.

באופן דומה, $d = R\cdot\sin\alpha$. מכל הנוסחאות הנ"ל נקבל

$$2\pi+\alpha = \frac{v\cdot d}{Rv_s} = \frac{d}{OT} = \frac{R\cdot\sin\alpha}{R\cdot\cos\alpha} = \tan\alpha.$$

המשוואה מגדירה את הערך של α. אומנם קשה לפתור את המשוואה הזאת בנוסחאות (אין סימון סטנדארטי לפונקציה הפוכה של $\tan\alpha-\alpha$) אבל קל לפתור אותה נומרית ולקבל $\alpha \approx 1.442066529758$, וזה בערך 82.6°.

מכאן היחס הגבולי הוא $\frac{v_s}{v} = \frac{OT}{R} = \cos\alpha = 0.128375$.

3. ארבעה צבים נקודתיים, ששמותיהם איילה, בני, גילה ודני נמצאים במישור אחד בקודקודי הריבוע שצלעותיו 10 מטר. הם מתחילים לנוע בו-זמנית במהירויות קבועות ושוות: בכל רגע איילה הולכת לכיוון בני, בני הולך לכיוון גילה, גילה לכיוון דני, ודני לכיוון איילה (כל צב מתקדם לכיוון בו נמצא הצב שהוא שואף אליו ברגע נתון). מה המרחק שכל צב יעבור, עד שהוא יגיע לצב שהוא שואף אליו?

תשובה. 10 מטר.

פתרון. לתמונה יש סימטריה של סיבוב ב-90° ביחס למרכז הריבוע שנשמרת, לכן בכל רגע נתון הצבים יהיו בקודקודי הריבוע (כל עוד הם לא יפגשו כולם במרכז הריבוע). נסתכל על

הזוג איילה-בני. וקטור מהירות השינוי של הווקטור AB שמצביע מאיילה לבני מושפע משני דברים: התנועה של איילה והתנועה של בני. ווקטור המהירות של בני מאונך לווקטור AB, לכן ההשפעה שלו על מהירות השינוי של אורך |AB| היא אפסית בכל רגע. מצד שני, איילה הולכת בדיוק בכיוון של AB, וההשפעה של זה על |AB| שווה למהירות של איילה. לכן המרחק בין איילה לבני משתנה באותה מהירות, כמו אם בני היה עומד במקום ואיילה הייתה הולכת לקראתו. אבל במקרה זה איילה הייתה צריכה לעבור 10 מטר באותה מהירות שיש לה. לכן אורך המסלול של איילה (ובאופן סימטרי של בני, גילה, דני) הוא 10 מטר בדיוק עד שכולם יפגשו במרכז.

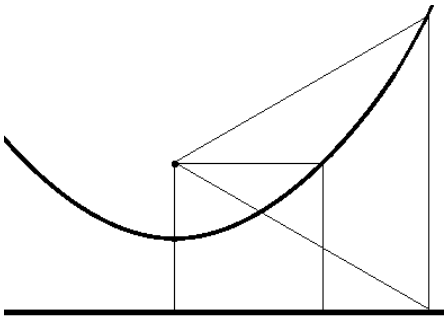
הערה. ניתן לחשב במדויק את מסלולי הצבים. המסלולים הן ספיראלות לוגריתמיות (כלומר $r=\alpha^{\varphi}$ בקואורדינאטות פולאריות, להבדיל מהספיראלה הרגילה, ידועה גם בשם ספירלת ארכימדס, שהיא $r=\alpha\varphi$ בקואורדינאטות פולאריות. זה מכיוון שאם הצבים גם יאטו את הקצב, ניתן יהיה להעביר את המצב של הצבים בהתחלה למצב שלהם כעבור זמן כלשהו. מכאן רואים, שהצבים יעשו אינסוף סיבובים סביב המרכז לפני שיגיעו ליעד. כמובן, זה עלול לקרות בצורה מדויקת רק לצבים נקודתיים באמת.

4. הכלב רודף אחרי השועל במישור. השועל רץ בקו ישר, והכלב רץ לכיוון שבו הוא רואה את השועל בכל רגע נתון. המהירויות של הכלב והשועל קבועות ושוות, וברגע הראשון של המרדף השועל נמצא בנקודה S והכלב בנקודה K, כאשר אורך של SK הוא L.

א. נניח שברגע ההתחלתי SK מאונך לישר של מסלול השועל. לאיזה מרחק מהשועל יצליח הכלב להגיע במהלך המרדף?

ב. אותה שאלה, אבל נניח שברגע של תחילת המרדף הזווית בין הקרן של מסלול השועל ל-SK היא 60°.

פתרון. בציור שלנו השועל רץ צפונה. נעבור למערכת היחוס של השועל. המהירות של הכלב היא סכום של שני מרכיבים: אחד בכיוון השועל, והשני מכוון דרומה. סכום שני המרכיבים מכוון בחוצה הזווית של המעוין שהם יוצרים. לכן לפי התכונה האופטית של פרבולה, הכלב מתקדם על פרבולה ששועל הוא המוקד שלו, והמדריך זה קו אופקי שנמצא מדרום לשועל.



קל לראות, שהכלב מתקרב לציר הראשי של הפרבולה במהירות לא אפסית. לכן הנקודה הגבולית של הכלב היא קודקוד הפרבולה. (אפשר להראות, שכלב אף פעם לא יגיע לנקודה זאת, אבל הוא יתקרב לקודקוד של הפרבולה יותר ויותר). המרחק הגבולי והקטן ביותר שהכלב ישאף אליו הוא מחצית המרחק בין מוקד למדריך.

א. במקרה זה, במערכת השועל קיים ריבוע ששניים מקודקודיו הם מיקום השועל, מיקום התחלתי של הכלב, ושני קודקודים האחרים על המדריך. לכן המרחק ההתחלתי בין שועל לכלב שווה למרחק בין המוקד למדריך, והוא יקטן פי 2 במהלך המרדף (או כמעט פי 2 עם המרדף לוקח זמן סופי).
ב. במקרה זה, יש משולש משוכלל: המקום ההתחלתי של כלב, ההיטל שלו על המדריך והמוקד. המרחק בין המוקד למדריך שווה למחצית הצלע של המשולש, לכן הכלב יתקרב לשועל פי 4 (או כמעט פי 4, אם המרדף ימשך זמן רב אבל סופי).

5. א. צפרדע (שהוא קטע באורך f) נמצא על קו ישר, ומתקדם בקפיצות קבועות כל שנייה. מיקום הצפרדע, אורך הקפיצה ו- f אינם ידועים לצייד. בכל שנייה הצייד יורה בנקודה ספציפית של הישר. האם הצייד יכול להבטיח, שתוך זמן סופי הוא יפגע בצפרדע?
ב. אותה שאלה, אבל כרגע הצפרדע הוא עיגול במישור שקוטרו f, שמתקדם כל שנייה בווקטור קבוע, והצייד יורה בנקודות של מישור.

תשובה. א. כן. ב. לא.
פתרון. א. נסמן: x_0 - המיקום ההתחלתי (של קצה השמאלי של הצפרדע), v - גודל הקפיצה. אז ברגע n הצפרדע הוא קטע $[x_n, x_n+f]$ כאשר $x_n = x_0 + nv$. נחלק את מרחב השלשות (f, x_0, v) לתיבות $\left[2^{-n}, 2^{1-n}\right]\times\left[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}\right]\times\left[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}\right]$, כלומר
$$f \in \left[2^{-n}, 2^{1-n}\right],\ x_0 \in \left[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}\right],\ v \in \left[m2^{-n-1}, (m+1)2^{-n-1}\right].$$
כאשר k, m, n שלמים.
קבוצת התיבות הללו בת מניה, כלומר ניתן לרשום את רשימת כל התיבות בשורה אחת ולטפל בהם אחת אחרי השנייה. אנחנו נוכיח, כי ניתן לטפל בתיבה כלשהי במספר חסום של מהלכים, גם אם מתחילים לטפל בה N מהלכים אחרי ההתחלה.
ניקח תיבה נתונה. אחרי N מהלכים, הקצה השמאלי של הצפרדע נמצא בין $k2^{-n} + Nm2^{-n-1}$ לבין $(k+1)2^{-n} + N(m+1)2^{-n-1}$. נזכור כי $f \ge 2^{-n}$. נתחיל במהלך ה-N מהמקום $k2^{-n} + Nm2^{-n-1}$ ונתקדם בצעדים של $m2^{-n-1} + 2^{-n}$. המהירות היחסית בין הצעדים שלנו לבין הצפרדע בתנאי שהפרמטרים שלו נמצאים בתיבה הנתונה היא בין 2^{-n} לבין $2^{-n} - 2^{-n-1} = 2^{-n-1}$, כלומר היא בכל מקרה חיובית וקטנה מ-2^{-n}, לכן תוך פחות מ-$\frac{2^{-n} + N\cdot 2^{-n-1}}{2^{-n-1}}$ צעדים אנחנו נתפוס את הצפרדע אם הפרמטרים שלו בתיבה (אנחנו לא נוכל לדלג עליו, כי המהירות היחסית בין הצייד לצפרדע קטנה מ- f).
לכן לכל תיבת פרמטרים שיש לפניה מספר סופי של תיבות פרמטרים, נתפוס את הצפרדע תוך מספר סופי ידוע מראש של מהלכים לאחר שנפסול את כל התיבות הקודמות. אבל יש אפשרות

להכין רשימה של כל התיבות, כך שלפני כל תיבה יהיו מספר סופי של תיבות, ולכן הצפרדע יושמד.

הערה. כידוע, חורפנים צדים צפרדעים.

ב. אנחנו נוכיח שאפילו אם נקודת ההתחלה של הצפרדע ידועה, עדיין אי-אפשר לתפוס אותו. נניח שברגע ה-0, הצפרדע נמצא בנקודה (0,0). נניח שהרדיוס של הצפרדע הוא R. כאשר הצייד מצביע ברגע n (כאשר n הוא מ-1 עד אינסוף) על הנקודה x_n, הוא יפגע אם מהירות הצפרדע היא x_n/n אם שגיאה של R/n לכל היותר. לאחר ירייה כזו הצפרדע תיתפס אם וקטור הקפיצה שלה שייך לעיגול ששטחו $\frac{\pi R^2}{n^2}$. בסה"כ העיגולים האלה מכסים שטח סופי, הרי $\pi R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3 R^2}{6}$, וזה סופי, והשטח הכולל של המישור הוא אינסופי.