תרגיל 12

משוואות פונקציונליות

1. מצא\י את כל סדרות הממשיים שלא מכילות אפס ומקיימות

א. $\frac{x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}$ לכל n.

ב. $3 \cdot \frac{x_n x_{n+3}}{x_{n+3} - x_n} = \frac{x_{n+1} x_{n+2}}{x_{n+2} - x_{n+1}}$ לכל n.

פתרון. א. נכפיל את שני הגורמים ב-x_n ונהפוך: נחליף כל אגף באחד חלקי הערך שלו. נקבל:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} x_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1} x_n}$$

$$\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}$$

לכן לסדרה $a_n = \frac{1}{x_n}$ יש הפרשים קבועים, כלומר זו סדרה חשבונית (שלא מתאפסת אף פעם).

לכן $x_n = \frac{1}{\alpha n + \beta}$.

ב. נהפוך את שני האגפים: נחליף כל אגף באחד חלקי הערך שלו. נקבל:

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+3}} \right) = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_{n+2}}$$

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+3}} = \frac{3}{x_{n+1}} - \frac{3}{x_{n+2}}$$

נסמן $a_n = \frac{1}{x_n}$. אז מתקיים: $a_n - 3a_{n+1} + 3a_{n+2} - a_{n+3} = 0$.

ניתן לרשום את זה בתור $(a_n - a_{n+1}) - 2(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) = 0$.

נסמן $b_n = a_n - a_{n+1}$. אז התנאי האחרון הוא מהצורה: $b_n - 2b_{n+1} + b_{n+2} = 0$.

במילים אחרות $(b_{n+2} - b_{n+1}) - (b_{n+1} - b_n) = 0$.

כלומר אם נסמן $c_n = b_{n+1} - b_n$ נקבל $c_{n+1} - c_n = 0$.

כלומר c_n סדרה קבועה, $b_n = b_0 + nc$ סדרה חשבונית, ולכן

$$a_n = a_0 + (b_0 + b_1 + ... + b_{n-1}) = a_0 + n \cdot b_0 + c \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \alpha + \beta n + \gamma n^2$$.

לכן $x_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha + \beta n + \gamma n^2}$.

הערה. החלפת סדרה $\{a_n\}$ בסדרה $\{b_n = a_{n+1} - a_n\}$ נקראת נגזרת דיסקרטית.

מה שעשינו בסוף של פתרון הוא מקרה פרטי של הדבר הבא: אם נסמן את הנגזרת הדיסקרטית של הסדרה ב-Δa של סדרה a, אז הפתרונות של $\Delta^k a = 0$ הם כל הפולינומים בעלי דרגה קטנה מ-k.

2. מצא\י את כל הפונקציות $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימות לכל x, y ממשיים:
$f\left(f\left(x\right)+y\right) = 2x + f\left(f\left(y\right)-x\right)$.

הערה. השאלה נלקחה מ-shortlist של IMO 2002.

פתרון. קודם כל, קל לבדוק כי f היא על. אכן, אם מציב $y = -f\left(x\right)$ נראה כי $f\left(0\right) = 2x + f\left(f\left(-f\left(x\right)\right)-x\right)$ כלומר לכל x ניתן למצוא $z = f\left(-f\left(x\right)\right)-x$ עבורו $f\left(z\right) = f\left(0\right) - 2x$. לא משנה מהו $f\left(0\right)$, בכל מקרה $f\left(0\right)-2x$ מקבל את כל הערכים הממשיים, לכן כך גם z.
לכן קיים x_0 עבורו $f\left(x_0\right) = 0$. נציב את x_0 במקום x במשוואה הנתונה ונקבל:
$f\left(y\right) = 2x_0 + f\left(f\left(y\right)-x_0\right)$, במילים אחרות $f\left(y\right)-x_0 = x_0 + f\left(f\left(y\right)-x_0\right)$.
נסמן $u = f\left(y\right)-x_0$ (גם u יכול לקבל כל ערך). אז נקבל $u = f\left(u\right)+x_0$ לכל u.
קיבלנו ביטוי מפורש לפונקציה: $f\left(u\right) = u - x_0$, וזה נכון לכל u. נשאר להציב בנתון ולבדוק, אילו ערכים של x_0 מתאימים. התנאי המקורי $f\left(f\left(x\right)+y\right) = 2x + f\left(f\left(y\right)-x\right)$ מקבל צורה $x + y - 2x_0 = 2x + y - x - 2x_0$, וזה נכון לכל x_0.
לכן כל פונקציה מסוג $f\left(x\right) = x + c$ מתאימה.

3. נסמן ב-$\mathbb{S}$ את אוסף כל המספרים הממשיים, אשר גדולים ממש מ--1.
מצא\י את כל הפונקציות $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ המקיימות: לכל $x, y \in \mathbb{S}$,
$$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$$
ובנוסף $\frac{f(x)}{x}$, עולה ממש בכל אחד משני התחומים $-1 < x < 0$ ו-$x > 0$.

הערה. השאלה הופיע ב-IMO 1994.

פתרון. נניח כי $f(a)=a$. אם נציב $x=y=a$ בתנאי הנתון, נקבל כי גם עבור $b=2a+a^2$ מתקיים $f(b)=b$.

אם $-1<a<0$ אז $b=a+a(1+a)=(1+a)^2-1$ מקיים $-1<b<a$. אבל $\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}$. זה לא יתכן. באופן דומה, אם $a>0$ אז $b>a$, אבל אז שוב $\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}$. סתירה.

ובכן, אם $f(a)=a$ אז $a=0$.

אבל אם נציב $x=y$ בתנאי המקורי, נקבל כי $f(x+f(x)+xf(x))=x+f(x)+xf(x)$, כלומר $f(a)=a$ כאשר $a=x+f(x)+x\cdot f(x)$. לכן $x+f(x)+x\cdot f(x)=0$.

כלומר $f(x)=-\frac{x}{1+x}$ (ניתן לחלק ב-$1+x$ כי הוא חיובי).

נשאר לבצע בדיקה: לראות כי $f(x)=-\frac{x}{1+x}$ מתאימה.

$\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{1+x}$, אכן עולה ממש בכל אחד משני התחומים $-1<x<0$ ו-$x>0$.

$$f\left(x+(1+x)f(y)\right)=y+(1+y)f(x)$$

כלומר $f\left(x-(1+x)\frac{y}{1+y}\right)=y-(1+y)\frac{x}{1+x}$

$$f\left(\frac{x(1+y)-y(1+x)}{1+y}\right)=\frac{y(1+x)-x(1+y)}{1+x}$$

$$f\left(\frac{x-y}{1+y}\right)=\frac{y-x}{1+x}$$

$$-\left(\frac{x-y}{1+y}\right)\Big/\left(1+\frac{x-y}{1+y}\right)=\frac{y-x}{1+x}$$

$$-(x-y)/(1+y+x-y)=\frac{y-x}{1+x}$$

$$(y-x)/(1+x)=\frac{y-x}{1+x}$$

וזה נכון.

4. מצא\י את כל הפולינומים f בעלי מקדמים ממשיים, כך שלכל שלושה ממשיים a,b,c עבורם $ab+bc+ca=0$, מתקיים: $f(a-b)+f(b-c)+f(c-a)=2f(a+b+c)$.

הערה. השאלה הייתה שאלה 2 ב-IMO 2004.

פתרון. נציב $a=b=c=0$ ונקבל $3f(0)=2f(0)$, כלומר $f(0)=0$.

אם רק $b=c=0$ נקבל $f(a)+f(0)+f(-a)=2f(a)$ לכל a, כלומר $f(-a)=f(a)$.

כלומר f פולינום זוגי (מכיל רק חזקות זוגיות).

את התנאי $ab+bc+ca=0$, אם אין אפסים בין המספרים, ניתן לנסח גם יותר פשוט:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. כך יהי יותר קל להבין, למשל, ששלשה $(2x,-3x,-6x)$ מקיימים את התנאי.

נציב ונקבל:

$$(*)\quad f(5x)+f(-3x)+f(8x)=2f(-7x)$$

התנאי הראשון אומר, כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית.

נגיד כי $f(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-2}x^{2n-2}+\ldots$, כאשר $2n$ היא הדרגה המובילה. אם נציב x גדול ממש (למשל $m\cdot 10^{10}$, כאשר $m>|a_{2k}|$ לכל k) בזהות (*), נראה שהדרגה הבחירה בזהות זאת חייבת להצטמצם. לכן $5^{2n}+3^{2n}+8^{2n}=2\cdot 7^{2n}$, כאשר $2n$ היא דרגת הפולינום.

בפרט, $8^{2n}<2\cdot 7^{2n}$, כלומר $\left(1+\frac{1}{7}\right)^{2n}=\left(\frac{8}{7}\right)^{2n}<2$. לכן $1+\frac{2n}{7}<2$, כלומר דרגת הפולינום $2n$ היא 6 לכל היותר, ומקיימת $5^{2n}+3^{2n}+8^{2n}=2\cdot 7^{2n}$.

יש 3 אפשרויות 2, 4, 6 שצריך לבדוק (המקדם החופשי הוא 0, לכן אם דרגת הפולינום 0 הוא שווה ל-0 זהותית). ניתן לפסול את 6 עם חשבון טיבה יותר עדין:

$$\left(\frac{8}{7}\right)^6=\left(\frac{512}{343}\right)^2>\left(\frac{500}{350}\right)^2=\left(\frac{10}{7}\right)^2=\frac{100}{49}>2,$$

לכן $8^6>2\cdot 7^6$. לכן הפולינום מדרגה 2 או 4. הצבה תראה שהתנאי (*) מתקיים עבור 2 וגם עבור 4, אבל עדיף להציב ישר את המקרה הכללי:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a+b+c)^2$$

בהנחה ש-$ab+bc+ca=0$, פתיחת סוגריים פשוטה מראה שזה נכון.

עבור $(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4=2(a+b+c)^4$ נראה שבפתיחת סוגריים $2a^4,2b^2,2c^4$ יתקזזו ויישאר

$$-4\left(a^3b+b^3a+a^3c+c^3a+b^3c+c^3b\right)+6\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=$$
$$=8\left(a^3b+b^3a+a^3c+c^3a+b^3c+c^3b\right)+12\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+24\left(a^2bc+b^2ac+c^2ab\right)$$

לאחר צמצום רואים שצריך לבדוק זהות

$$12\left(a^3b+b^3a+a^3c+c^3a+b^3c+c^3b\right)+6\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+24\left(a^2bc+b^2ac+c^2ab\right)=0.$$

בהינתן $ab+bc+ca=0$.

אבל אז $A=\left(ab+bc+ca\right)^2=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2\left(a^2bc+b^2ac+c^2ab\right)$, וגם 0

$B=\left(ab+bc+ca\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^3b+b^3a+a^3c+c^3a+b^3c+c^3a+a^2bc+b^2ac+c^2ab=0$

ולכן גם $12\cdot b+6\cdot a=0$, מש"ל.

ובכן, גם x^2 וגם x^4 מקיימים את תנאי הבעיה, ומכיוון שהתנאי ליניארי גם כל פולינום מסוג $\alpha x^4+\beta x^2$ מתאים. אף דוגמה אחרת לא תתאים, הרי הפולינום הוא זוגי, מדרגה קטנה מ-6 ומקדם חופשי שלו מתאפס.

הערה. שתי השאלות הבאות הן מה-shortlist של 2007.

5. מצא את כל הפונקציות המקיימות $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ לכל x,y ממשיים חיוביים:
$f(x+f(y))=f(x+y)+f(y)$.

פתרון. אם נציב $x=y-f\left(y\right)$ נקבל $f\left(y\right)=f\left(2y-f\left(y\right)\right)+f\left(y\right)$, וזה יוביל אותנו לסתירה, כי f חיובי תמיד. לכן אסור להציב את זה, כלומר $x=y-f\left(y\right)$ אינו חיובי, לכן $y<f\left(y\right)$.

אם $f\left(y_1\right)-y_1=f\left(y_2\right)-y_2$ עבור $y_1,y_2>0$ שונים, אז ניתן לבחור $x_1,x_2>0$ עבורם $x_1+y_1=x_2+y_2$, ואז גם $x_1+f\left(y_1\right)=x_2+f\left(y_2\right)$, ולכן

$f\left(y_1\right)=f\left(x_1+f\left(y_1\right)\right)-f\left(x_1+y_1\right)=f\left(x_2+f\left(y_2\right)\right)-f\left(x_2+y_2\right)=f\left(y_2\right)$.

אבל אז גם $y_1=y_2$. לכן $f\left(y\right)-y$ חח"ע (מקבלת כל ערך פעם אחד בלבד).

מצד שני, $f\left(f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(x\right)+y\right)+f(y)=f\left(x+y\right)+f\left(x\right)+f\left(y\right)$

לכן אם $f\left(x\right)+f\left(y\right)=z$ אז $f\left(z\right)-z=f\left(x+y\right)$.

אבל $f\left(z\right)-z$ חח"ע, לכן $f\left(x\right)+f\left(y\right)=z$ נקבע ביחידות על ידי $x+y$.

למשל אם ניקח $x=y=\frac{x+y}{2}$ אז $f\left(x\right)+f\left(y\right)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$. אם ניקח x,y אחרים עם אותו סכום, נקבל גם $f\left(x\right)+f\left(y\right)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

לכן, אם $f\left(x\right)=f\left(x+h\right)=c$ עבור $x,h>0$ אז $f\left(x\right)+f\left(x+2h\right)=2f\left(x+h\right)=2c$, ואז $f\left(x+2h\right)=c$ גם,ובאופן דומה גם $f\left(x+nh\right)=c$ לכל n טבעי, ולכן עבור n טבעי גדול מספיק $f\left(x+nh\right)=c<x+nh$ בניגוד למה שהוכחנו בהתחלה. לכן f חח"ע.

כעת $f\left(f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(x\right)+y\right)+f\left(y\right)=f\left(\frac{\left(f\left(x\right)+y\right)+y}{2}\right)=f\left(\frac{f\left(x\right)}{2}+y\right)$

ובאופן סימטרי $=f\left(\frac{f\left(y\right)}{2}+x\right)$

אבל f חח"ע, לכן $\frac{f\left(x\right)}{2}+y=\frac{f\left(y\right)}{2}+x$, לכן $f\left(x\right)-2x=f\left(y\right)-2y$ כלומר זה קבוע, כלומר קיים a קבוע עבורו $f\left(x\right)=2x+a$. נציב ונבדוק, לאיזה a זה מתאים.

$$f(x+f(y))=f(x+y)+f(y)$$
$$2\left(x+2y+a\right)+a=2(x+y)+a+2y+a$$
$$2x+4y+3a=2x+4y+2a$$

כלומר זה עובד כאשר $a=0$. ובכן, הפונקציה היחידה היא $f\left(x\right)=2x$.

6. מצא את כל הפונקציות $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהן על, ובנוסף, לכל m,n טבעיים ולכל ראשוני p, מתקיים: $p\mid f(m+n)\Leftrightarrow p\mid(f(m)+f(n))$.

פתרון. ניקח p ראשוני. קיים $d\in\mathbb{N}$ מינימלי עבורו $p\mid f\left(d\right)$ (הרי f היא פונקצית על). קל להראות באינדוקציה, כי $p\mid f\left(kd\right)$ לכל $k\in\mathbb{N}$.

נניח כי $p\mid f\left(x\right)$, אבל $d\nmid x$. אם כך, $p=kd+r$, כאשר $r\in\left\{1,2,...,d-1\right\}$. אם כך, אז $p\mid f\left(kd\right)+f\left(r\right)$ ואז $p\mid f\left(r\right)$, בניגוד להנחת המינימליות של d. ובכן $p\mid f\left(x\right)$ אך ורק כאשר $d\mid x$.

אם $x=y\left(\mathrm{mod}\,d\right)$, ניקח $D>x$ מספר כלשהו עבורו $d\mid D$. אז $d\mid f\left(y-x+D\right)$ כלומר $p\mid f\left(x+D-x\right)$ לכן $p\mid\left(f\left(y\right)+f\left(D-x\right)\right)$, ובאופן דומה $p\mid\left(f\left(x\right)+f\left(D-x\right)\right)$.

מכאן $f\left(x\right)=f\left(y\right)\left(\mathrm{mod}\,p\right)$ כל עוד $x=y\left(\mathrm{mod}\,d\right)$.

גם להפך: אם $f\left(x\right)=f\left(y\right)\left(\mathrm{mod}\,p\right)$, נניח כי $y>x$ וניקח D כמו קודם, ונקבל

$$0\equiv f\left(x\right)+f\left(D-x\right)\equiv f\left(y\right)+f\left(D-x\right)\equiv$$
$$\equiv f\left(y+D-x\right)\equiv f\left(y-x\right)+f\left(D\right)\equiv f\left(y-x\right)\left(\mathrm{mod}\,p\right)$$

כלומר $d\mid\left(y-x\right)$. ובכן, $f\left(x\right)=f\left(y\right)\left(\mathrm{mod}\,p\right)$ אם ורק אם $x=y\left(\mathrm{mod}\,d\right)$.

לכן שאריות שונות של $x\left(\mathrm{mod}\,d\right)$ מתאימות לשאריות שונות של $f\left(x\right)\left(\mathrm{mod}\,p\right)$, ואותן שאריות מתאימות לאותן שאריות. לכן f משרה פונקציה חח"ע משאריות מודולו d לשאריות מודולו p. אבל פונקציה הזו היא גם על, כי f היא על. לכן $p=d$.

ובכן, הוכחנו כי $p \mid x$ אם ורק אם $p \mid f(x)$. גם הוכחנו כי $f(x) = f(y) \pmod p$ אם ורק אם $x = y \pmod p$.

אנחנו נוכיח באינדוקציה כי $f(n) = n$.

בסיס אינדוקציה: מכיוון שאף ראשוני לא מחלק את 1, אז אף ראשוני גם לא מחלק את $f(1)$, ולכן $f(1) = 1$.

נניח כי $f(k) = k$ לכל $k < n$. אם $f(n) = m < n$ אז $f(n) = f(m) \pmod p$ לכל ראשוני, ואש $m - n$ מתחלק בכל הראשוניים, כלומר $m = n$ בניגוד להנחה.

אם $f(n) = m > n$, אז $m + 1 - n \geq 2$ ולכן $p \mid m + 1 - n$ עבור ראשוני מסוים p.

ואז $f(n-1) = n - 1 \equiv m = f(n) \pmod p$ כלומר גם $n - 1 \equiv n \pmod p$ וזה לא יתכן.

נשארנו אם אפשרות אחת בלבד $f(n) = n$.

ובכן $f(n) = n$ זו הפונקציה היחידה שעלולה לתת פתרון.

בדיקה פשוטה מראה שהיא מתאימה.