תרגיל 12

משוואות פונקציונאליות

בשאלות מסוג זה מומלץ לחשוב עם הידיים. אני ממליץ להצטייד בערמה עבה של נייר, עט או שתיים, זמן פנוי ומצב רוח תוקפני.

1. מצא\י את כל סדרות הממשיים שלא מכילות אפס ומקיימות

א. $\frac{x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}$ לכל n.

ב. $3 \cdot \frac{x_n x_{n+3}}{x_{n+3} - x_n} = \frac{x_{n+1} x_{n+2}}{x_{n+2} - x_{n+1}}$ לכל n.

2. מצא\י את כל הפונקציות $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימות לכל x, y ממשיים:
$f\left(f\left(x\right) + y\right) = 2x + f\left(f\left(y\right) - x\right)$.

3. נסמן ב-$\mathbb{S}$ את אוסף כל המספרים הממשיים, אשר גדולים ממש מ-1–. מצא\ע את כל הפונקציות $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ המקיימות: $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ לכל $x, y \in \mathbb{S}$, ובנוסף $\frac{f(x)}{x}$ עולה ממש בכל אחד משני התחומים $-1 < x < 0$ ו- $x > 0$.

4. מצא\י את כל הפולינומים f בעלי מקדמים ממשיים, כך שלכל $a,b,c \in \mathbb{R}$ עבורם $ab + bc + ca = 0$, מתקיים: $f(a-b) + f(b-c) + f(c-a) = 2f(a+b+c)$.

5. תהי $\mathbb{R}^+$ קבוצת כל המספרים הממשיים החיוביים. מצא\י את כל הפונקציות המקיימות $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ עבורה לכל $x, y \in \mathbb{R}^+$ מתקיים: $f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$.

6. נסמן ב-$\mathbb{N}$ קבוצת כל השלמים החיוביים. מצא\י את כל הפונקציות $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ שהן על, ובנוסף, לכל $m,n \in \mathbb{N}$ ולכל ראשוני p, מתקיים: $p \mid f(m+n) \Leftrightarrow p \mid (f(m) + f(n))$.