# תרגיל 11

בניות ומקומות גיאומטריים

**המלצה כללית.** בהרבה שאלות בנייה מומלץ בהתחלה להניח, שהמצב הרצוי כבר נבנה, לצייר את המצב הרצוי הזה ולנתח אותו, ורק אז לשאול את עצמך מה חסר על מנת להגיע למצב הרצוי הזה.

**1.** נתון ישר, ושתי נקודות A, B באותו צד שלו. בנה\י נקודה X על הישר הנתון, כך שהזווית $\measuredangle AXB$ תהיה מקסימאלית.

**פתרון.** נניח שכבר בנינו. נעביר מעגל ABX. כל הנקודות על הקשת AXB רואות את הקטע AB באותה הזווית. קל לראות גם, שכל נקודה שנמצא בתוך העיגול בין מיתר AB לקשת AXB רואה את AB בזווית יותר גדולה מאשר X (למה?).
אם המעגל חותך את הישר הנתון בעוד נקודה Y בנוסף ל-X, אז לכל Z בין X ל-Y על הישר $\measuredangle AXB < \measuredangle AZB$. לכן לא יתכן שיש נקודת חיתוך נוספת. לכן המעגל ABX משיק לישר הנתון ב-X.

נמשיך את הישר AB. יש שני מצבים: AB מקביל לישר הנתון או פוגש איתו בנקודה V. במקרה הראשון קל לראות כי X זו נקודת מפגש של הישר הנתון לאנך האמצעי ל-AB. במקרה השני, לפי תכונה ידוע של מעגל, $VA \cdot VB = VX^2$. לכן ניתן לבצע את הבניה כך: נעביר מעגל שקוטרו AB, נעביר משיק VT למעגל זה (T נקודת השקה), ואז גם $VT = \sqrt{VA \cdot VB} = VX$, ולכן X מתקבלת בתור אחת מבין נקודות החיתוך בין הישר הנתון לבין מעגל שמרכזו V ורדיוסו VT.

**2.** נתון משולש עקום קמור, ששני צלעותיו הם קטעים ישרים, והשלישית היא קשת מעגלית.
א. בנה\י קו ישר, שחוצה את היקפו.
ב. בנה\י קו ישר, שחוצה את שטחו.

הערה. ברור שיש הרבה קווים שמקיימים א' או ב', ומספיק לבנות אחד. משיקולי רציפות ניתן להבין, שיש גם ישר שמקיים את שני הסעיפים, אבל לא ברור האם אפשר לבנות אותו עם סרגל ומחוגה.
**פתרון.** נכניס סימונים: קודקודי המשולש A, B, C כאשר AC, BC צלעות ישרות ו-BC היא קשת מעגלית. מכיוון שקשה לטפל גם בקשת וגם בקטעים בו-זמנית, הדבר המתבקש הוא לטפל בחלק ישר ובחלק עקום בנפרד.

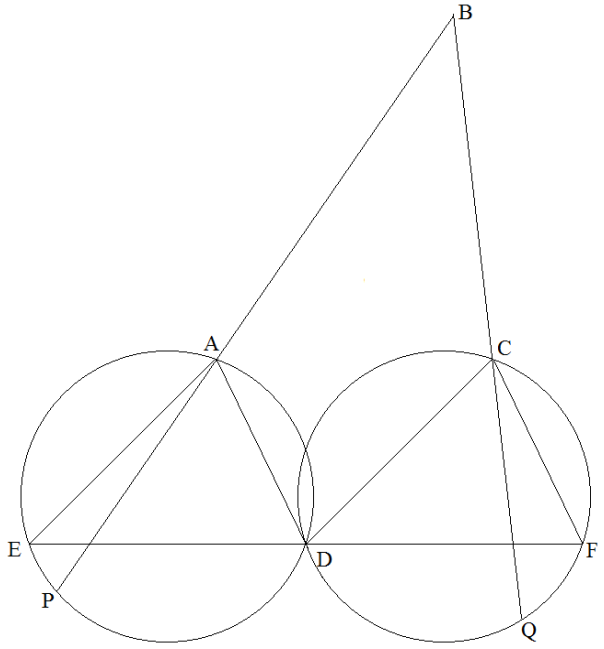
לכן בהתחלה נחלק את הקשת AB לשני חלקים שווים (חותכים את הקשת עם האנך האמצעי של הקטע AB), את נקודת האמצע נסמן M.

**א.** נשאר למצוא נקודה N שמחלקת את הקו השבור ACB לשני חלקים שווי אורך. זה ממש קל ואתם לא צריכים שאני אסביר לכם איך.

**ב.** תהיה K נקודה אמצע הקטע AB – קל לבנות אותה. אז הקו השבור MKC מחלק המשולש העקום לשני חלקים שווי שטח: KC הוא תיכון שחותך את המשולש הישר לשני חלקים שווי שטח, ו-KM מחלק את השטח בין מיתר לקשת AB לשני חלקים סימטריים. זה לא בדיוק מה שרצינו (רצינו קטע ישר ולא קו שבור) אבל זה מתקרב.
נבנה קו ישר דרך K, שמקביל ל-MC. ישר זה יחתוך את הקטע הגדול של הקו השבור ACB בנקודה P. PKMC הוא טרפז, ולהן המשולשים PMC, KMC שווי שטח, ולכן הקטע הישר PM חוצה את השטח של המשולש העקום הנתון.

**3.** נתון מעגל ונקודה A בתוכו. מצאו את המקום הגיאומטרי של נקודות C, עבורן קיים מלבן ABCD, כאשר B, D נמצאות על המעגל הנתון.

**פתרון.** תהיה X נקודה כלשהי (במישור או במרחב), ABCD מלבן, אז מתקיימת נוסחא:
$$AX^2+CX^2=BX^2+DX^2 .$$
הקוראים שלא מכירים את הנוסחא, מוזמנים להסיק אותה ממשפט פיתגורס.
נשתמש בנוסחא זאת עבור המקרה שלנו, כשבמקום X נציב את מרכז המעגל הנתון O. נקבל $AO^2+CO^2=BO^2+DO^2=2R^2$, כאשר $R$ הוא רדיוס המעגל.
לכן $CO=\sqrt{2R^2-AO^2}$, כלומר לא תלוי בכלום. לכן המקום הגיאומטרי הוא תת-בוצה של מעגל שמרכזו O ורדיוסו $\sqrt{2R^2-AO^2}$.
אפשר להבין שכל המקום הגיאומטרי הוא בעצם כל המעגל משיקולי רציפות. ניקח קרן כלשהי OP, ונבחר שני מצבים: אחד קשר B נמצא על קרן OP ו-D נמצא מימינו, ומצב שני בו D נמצא על OP ו-B נמצא משמאלו, ונסובב ממצב ראשון למצב שני, כך שקרן OB תעבור $90^\circ$. אז C נמצא בהתחלה מימין לקרן OP, ובסוף משמאלו, ומתישהו באמצע חוצה את הקרן. לכן כל נקודה על המעגל נמצאת על המקום הגיאומטרי, ולכן המעגל שמרכזו O ורדיוסו $\sqrt{2R^2-AO^2}$ הוא המקום הגיאומטרי.




**4.** בנה\י מרובע, בהינתן כל הזוויות שלו ואורכי אלכסוניו.

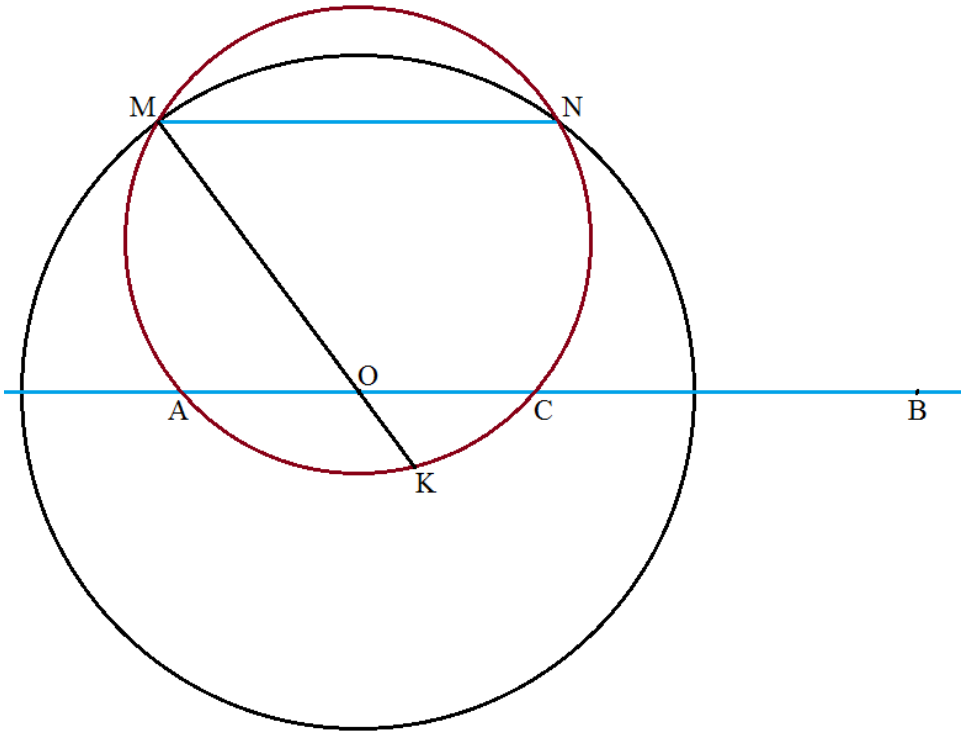
**פתרון.** בהתחלה נדמיין שכבר בנינו את המצב, ונתחיל אותו. יהיה ABCD המרובע שרוצים לבנות. נניח כי נקודות E, F משלימות את המשולש CAD למקביליות FCAD, CAED. תהיה נקודה P נקודת חיתוך נוספת של הישר AB והמעגל ADE, ובאופן דומה נקודה Q היא נקודת חיתוך נוספת של הישר BC עם המעגל CDF.

מה מתוך התמונה שציירנו נוכל לבנות? נוכל לבנות קטעים זוג קטעים צמודים DE, DF שווים לאלכסון AC הנתון. נוכל עליהם לבנות את המעגלים

CDF ,ADE (אפילו לפני שנצליח לבנות A, C): אלה מעגלים, שמהקשת העליונה שלהם הנקודות רואות את הקטעים ED, DF בהתאמה בזווית ששווה לזווית D של המרובע. אנחנו יודעים גם זוויות PAD, CQD – אלה זוויות שמשלימות את זוויות A, C של המרובע ל-$180^\circ$. לכן נוכל לבנות את P, Q, כי אנחנו יודעים את גודל הזוויות שנשענות על הקשתות DP, QD.
נקודה B נמצאת במרחק נתון מנקודה D שכבר סומנה, ורואה את הקטע PQ בזווית נתונה. התנאי הראשון מגדיר מעגל שמרכזו B ורדיוסו שווה לאלכסון שנתון; התנאי השני מגדיר קשת דרך P ו-Q שגם אותה אנו מסוגלים לבנות. לכן ניתן לבנות את B כנקודת חיתוך של מעגל וקשת, מש"ל.

**5*.** במישור נתון מעגל ושני נקודות A, B לא במרכז המעגל, עבורן הישר AB עובר דרך מרכז המעגל. בנוסף נתון זווית $\alpha$.
א. בנה\י מיתר MN של המעגל הנתון, עבורו $\sphericalangle MAN = \alpha$, והישר MN מקביל ל-AB.
ב. בנה\י מיתר MN של המעגל הנתון, עבורו $\sphericalangle MAN = \alpha$, והישר MN עובר דרך B.

פתרון. א. כרגיל, נדמיין לעצמנו שכבר הצלחנו לבנות. אנחנו נסמן ב-O את מרכז המעגל הנתון.




נעביר מעגל MAN, שיחתוך את הישר AB שוב בנקודה C. MN מקביל ל-AC, וסימטריה ביחס לאנך האמצעי של MN שומרת על O ומעבירה את A ל-C. כלומר את C קל לבנות. כעת נעביר את הישר MO, שיחתוך את המעגל MACN שוב בנקודה K.
אז $MO \cdot R = MO \cdot OK = OA \cdot OC = OA^2$, כלומר את האורך OK אנחנו יכולים לבנות. גם את הזווית MKN אנחנו יודעים: היא זווית $\alpha$ הנתונה.
כעת נראה, כיצד לבנות את האורך של MN. ניקח נקודה $M_1$ על המעגל הנתון, וניבחר על הישר $M_1O$ נקודה $K_1$ שמרחק ממנה ל-O הוא שווה ל-OK, ונעביר קרן מ-$K_1$ שתיצור

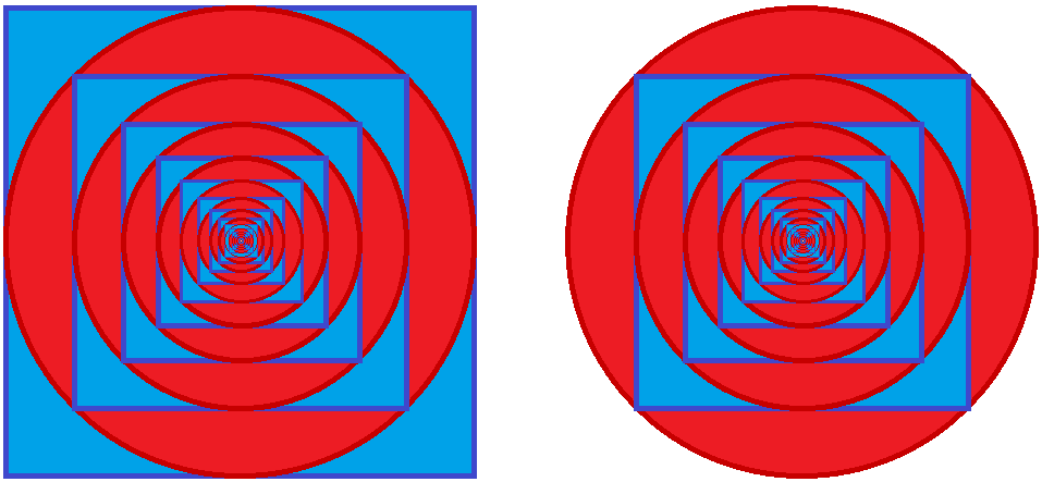
זווית $\alpha$ עם $K_1O$. נקודת חיתוך של הקרן הזאת אם המעגל היא $N_1$. המשולש $K_1M_1N_1$ שבנינו חופף למשולש KMN שלא בנינו, לכן מצאנו את האורך של MN. בנוסף, נוריד אנך מ-O למיתר $M_1N_1$ וכך נקבל מרחק מ-O ל-MN. אז את הישר MN ניתן לבנות בתור ישר שמקביל לישר AB ונמצא במרחק נתון ממנו.

אני ממליץ לקוראים לצייר את הציור לבד, ולבדוק כמה פתרונות יכולים לצאת (לפעמים קרן חותכת מעגל פעם אחד, לפעמים פעמיים).

**ב.** פתרון די דומה לסעיף א', אבל הבנייה של C לא מתקבלת ע"י שיקוף של A יחסית ל-O, אלה לפי נוסחאות $BA\cdot BC=BM\cdot BN=BP\cdot BQ$, כאשר P, Q אלה נקודות חיתוך של הישר AB עם המעגל הנתון.

**6.** נתון עיגול וריבוע (כולל גבול והחלק הפנימי). האם אפשר לצבוע כל נקודה גם בעיגול וגם בריבוע באחד משני צבעים, אדום או כחול, כך שקבוצת הנקודות האדומות של הריבוע דומה לקבוצת הנקודות האדומות של העיגול, וקבוצת הנקודות הכחולות של הריבוע דומה לקבוצת הנקודות הכחולות של העיגול?
(שתי צורות דומות אם אחת מתקבלת מהשנייה ע"י הומותטיה ותנועה.)

תשובה: כן.



הפתרון בציור. מרכז יכול להיות בצבע כלשהו לפי בחירתכם.