תרגיל 10

משחקים

1. על הלוח כתובים שני מספרים: 5773 ו-1000. בכל מהלך אפשר לרשום על הלוח מספר טבעי, שהוא הפרש של שני מספרים שכבר רשומים, בתנאי שהוא לא מופיע עדיין. שניים מבצעים מהלכים מסוג זה לפי התור. מפסיד מי שלא יכול לעשות מהלך. מי מנצח, הראשון או השני?

פתרון. אנחנו נוכיח, שבמשחק על הלוח בסופו של דבר יהיו כתובים כל המספרים השלמים מ-1 עד 5773. מכך נובע, שבסוף יהיה מספר אי-זוגי של מספרים, לכן הראשון יבצע את המהלך האחרון.
נבצע אלגוריתם אוקלידוס על 5773, 1000 באמצעות חיסור: כל פעם לרשימת המספרים הקיימים נחסיר את ההפרש של שני המספרים הקטנים ביותר שיש. מכיוון ש-5773 אינו מתחלק לא ב-2 ולא ב-5, אז בסופו של דבר נגיע ליחידה.
ברור שהמשחק יסתיים: יש לכל היותר 5773 מספרים שיכולים להופיע על הלוח, וכל אחד יכול להופיע רק פעם אחד, לכן המשחק יסתיים, ויגיע למצב בו לא ניתן לרשום עוד מספר.
המשחק לא יסתיים עד שלא יהיו על הלוח כל המספרים שמתקבלים באלגוריתם אוקלידוס: הרי אם לא רשמנו את המספרים האלה, אז ניתן לרשום על הלוח את המספר הראשון מבין מספרי אלגוריתם אוקלידוס שאינו רשום (כי הוא ההפרש של שני מספרים שכבר רשומים). לכן בשלב מסוים במשחק יופיע 1. לכן עד סוף המשחק יופיע גם כל מספר אחר בין 1 ל-5773: אם יש מספרים שלא הופיעו, ו-N הוא הגדול מביניהם, אז N+1 יופיע וגם 1 יופיע, לכן יהיה אפשר לרשום את N (או שהמשחק עוד לא נגמר).
ובכן, בסוף המשחק רשומים כל המספרים מ-1 עד 5773.

2. שני חכמים משחקים. בתחילת המשחק רשומים המספרים הטבעיים מ-0 עד 1024 כולל. בהתחלה, הראשון מוחק 512 מספרים. השני מוחק 256 מספרים. אז הראשון מוחק 128 מספרים, והשני מוחק 64 מספרים, וכך הלאה, עד שנשארים שני מספרים בלבד. בסוף המשחק החכם השני משלם לראשון את ההפרש בין המספרים.
כמה הוא הולך לשלם לו?

תשובה. 32.
פתרון. נשים לב, שאם לפני מהלך של שחקן כלשהו יש 2M+1 מספרים, אז הוא צריך למחוק M מתוכם. על מנת להוכיח שהתשובה שכתבנו נכונה, מספיק לעשות שני דברים:
א. להראות אסטרטגיה לראשון, שמאפשרת לו לקבל 32 לפחות.
ב. להראות אסטרטגיה לשני, שמאפשרת לו לשלם 32 לכל היותר.
נעשה את שני הדברים.

א. נציע לראשון אסטרטגיה כזאת: בכל מהלך שלו הוא מסדר את כל המספרים שיש עדיין בסדר עולה, ומוחק את אלה שבמקומות הזוגיים. אז אחרי כל מהלך שלו, המרחק המינימלי בין שני מספרים עוקבים גודל לפחות פי 2. לכן אם לפני מהלך ראשון שלו המרחק בין כל שני מספרים הוא לפחות 1, אז אחרי 5 מהלכים שלו ההפרש בין המספרים שנשארו הוא לפחות 32.

ב. נציע לשני אסטרטגיה כזאת: הוא מסדר את 2M+1 המספרים שיש בסדר עולה, ומוחק או את M הראשונים, או את M האחרונים, כך שאחרי מהלך שלו הפרש בין המספר הגדול לקטן יהיה כמה שיותר קטן. אם לפני המהלך שלו A הוא המספר הקטן, C הוא הגדול, ו-B הוא האמצעי (שיישאר בכל מקרה), אז ההפרש בין הגדול לקטן שהיה לפני מהלכו C – A הופך או ל- C – B או ל- B – A, לפי בחירתו (מה שיותר קטן), ולכן הוא יכול לבחור את זה כך, שהמספר הזה ירד לפחות פי 2. לכן אם בהתחלה זה 1024, אז בסוף זה לכל היותר 1024/32 = 32.

3. א. במשחק נים יש n ערמות של $a_1,...,a_n$ אבנים, כאשר בכל ערמה. שניים משחקים לפי התור. בכל מהלך ניתן להוציא כמות כלשהי (גדולה מ-0) של אבנים מערמה אחת לפי בחירת השחקן. מנצח מי שלוקח את האבן האחרונה. הוכח כי הראשון יכול לנצח אך ורק כאשר $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n = 0$.
(תזכורת: $\oplus$ זו פעולת XOR, כלומר חיבור בינארי בכל ספרה בנפרד, ללא מעברים. למשל $12 = 1100_2 = 1011_2 + 111_2 = 11 + 7$).
ב. נתבונן במשחק אחר, בו מהלכים מתבצעים לפי אותם כללים, אבל המטרה היא הפוכה: מי שלוקח את האבן האחרונה מפסיד. באיזה מצבים הראשון יוכל לנצח במשחק החדש?

פתרון. א. מספיק להוכיח שתי טענות:
(1) אם היה מצב של XOR אפס, אז אחרי מהלך כלשהו כבר לא יהיה מצב כזה.
(2) אם יש מצב בו XOR שונה מ-0, אז ניתן לעשות מהלך שיביא למצב של XOR אפס.

אם כך, אז לעבור למצב של XOR אפס זו אסטרטגיה מנצחת, הרי אז היריב אף פעם לא יגיע למצב שכל הערמות ריקות. נסמן $S = a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n$.

נוכיח את (1). אם $S = 0$, ושחקן כלשהו עושה מהלך, שהופך את a_i ל-b. במילים אחרות כמות האבנים בערמה i הפכה מ-a_i ל-$a_i \oplus c$, כאשר $c = a_i \oplus b \neq 0$. אז ה-XOR של כולם יהפוך ל-$S \oplus c$. כלומר אם זה התאפס מקודם, אז עכשיו זה לא יתאפס.

נוכיח את (2). אם $S \neq 0$, אז אנחנו רוצים שעבור a_i כלשהו a_i יוחלף ב-$a_i \oplus S$. זה אפשרי רק אם $a_i \oplus S < a_i$. ניקח את הספרה הבינארית המובילה של S שהיא 1. הספרה הזאת שווה ל-1 באחד מהמספרים a_i. אז במספר $a_i \oplus S$ הספרה הזאת מתאפסת (בניגוד ל-a_i עצמו), וכל הספרות הבחירות יותר של a_i, אם יש כאלו, הן אותו דבר ב-$a_i \oplus S$ כמו ב-a_i, לכן $a_i \oplus S < a_i$. מש"ל.

ב. אם יש רק ערמה אחת, ובה אבן אחת, אז השחקן שצריך לעשות מהלך בתור הבא מפסיד.
אם יש ערמה אחת, ובה יותר מאבן אחד, אז השחקן שצריך לעשות מהלך יכול לנצח: מספיק שייקח מהערמה את כל האבנים חוץ מאחת.
אם יש N ערמות, ובכל ערמה אבן אחת, אז כל מהלך פשוט מקטין את כמות הערמות ב-1. לכן במקרה זה השחקן שצריך לעשות מהלך בתור הבא ינצח אם N זוגי, ויפסיד אם N אי-זוגי.

אם יש N ערמות, שבאחת מהן יש יותר מאבן אחת, ובכל האחרות יש אבן אחת בדיוק, אז השחקן שתורו לשחק מנצח. אכן, הוא יכול לקחת את כל הערמה הגדולה, או להשאיר בה אבן אחת. אחד משני מצבים אלה הוא מצב מפסיד, לכן השחקן יכול לבחור מצב מפסיד עבור היריב שלו.

נשים לב, שבמקרה האחרון XOR של כל הערמות אינו מתאפס.
אנחנו נוכיח, שפרט למקרים שהסברנו קודם (כלומר כאשר יש רק ערמה אחת בה יותר מאבן אחת) המצבים המנצחים הם כאלה שבהם XOR מתאפס, והמצבים המספידים הם המצבים עבורם XOR לא מתאפס.
הרי אפשר לשחק באסטרטגיה של סעיף א' כל עוד שיש יותר מערמה אחת עם יותר מאבן אחת. אז לאחר זמן מה אחד השחקנים יצטרך להגיע למצב, בו יש בדיוק ערמה אחת בה יש יותר מאבן אחת. זה בדיוק השחקן שלא מצליח לאחר כל מהלך שלו לאפס את XOR. לכן הוא יצטרך להעביר את יריבו למצב מנצח, ולכן הוא זה שיפסיד.

4. על הלוח נמצאים מספר כלי משחק על משבצות שונות. בתורו, כל שחקן צריך להזיז כלי אחד שמאלה בתוך שורה או למעטה בתוך עמודה לפי בחירתו. מותר לדלג מעל כלים אחרים, אבל אם הכלי מגיע למשבצת בה כבר יש כלי, צריך להוריד את שני הכלים מהלוח. מי מנצח במשחק אם
א. אם מטרת המשחק היא לעשות את המהלך האחרון, למי יש אסטרטגיה מנצחת?
ב**. אם מטרת המשחק היא לא לעשות את המהלך האחרון, למי יש אסטרטגיה מנצחת?

פתרון. א. אנחנו טוענים, שמשחק זה שקול לגמרי למשחק נים. כל צריח מגדיר שני ערמות שהן שני הקואורדינאטות של כל צריח: שורה ועמודה (המספור של השורות מתחיל מ-0 למעטה, והמספור של עמודות מתחיל מ-0 בצד שמאל).
מה ששונה בין המשחק הזה למשחק נים, זה שלפעמים שני צריחים נעלמים, כאשר הם מגיעים לאותה משבצת. זה שקול להעלמת 4 ערמות שהן שוות בזוגות. כמו שראינו בשאלה הקודמת, זה לא משפיע על סוג המצב, כי ה-XOR לא משתנה. ובכן, מצבי הפסד הם המצבים עבורם XOR של כל הקואורדינאטות מתאפס, ואסטרטגית ניצחון היא להעביר, כל עוד זה אפשרי, את השחקן השני למצבי הפסד.

הערה. בעצם, כל משחק סופי ללא משור פנים שבו רוצים לעשות את המהלך האחרון שקול למשחק נים אם ערמות כלשהן. ניתן לחבר משחקים: כאשר יש את שני הלוחות בו-זמנית, וכל אחד יכול לבחור בתורו לעשות מהלך אחד באחד המשחקים, ומנצח מי שיעשה את המהלך האחרון. שקילות זאת ידועה בשם **נימברים** (שילוב בין נים לבין number), לכל משחק מסוג זה מתאים מספר, וסכום משחקים מתאים ל-XOR של הנימברים.
לא תמיד השקילות היא ברורה כמו בשאלה שלנו.

ב. בניגוד לסעף א', השאלה הזאת לא שקולה ל-3 ב'. נתחיל אם שני המלצות כלליות שעוזרות לפתור את השאלה.

(1) כאשר נתון משחק בעל אסטרטגיה ברורה, וממציאים משחק חדש אם אותם חוקים אבל מטרה הפוכה (כלומר המטרה היא להפסיד לפי חוקי המשחק המקורי), בהרבה מקרים צריך בהתחלה לשחק כמו במשחק המקורי, ובסוף לעשות משהו טיפה שונה.

(2) *כאשר אתם נתקלים בשאלה מורכבת שלא מצליחים לפתור אותה מיד, כדאי להתחיל מגרסה יותר פשוטה של אותה שאלה.*

במקרה שלנו: נתחיל משאלה חד-ממדית. יש לנו לוח משבצות חד-ממדי (פס, סופי בצד שמאל ואינסופי בצד ימין). אנחנו נניח, שיש מספר זוגי של צריכים (אם לא, ניתן להוסיף צריך במשבצת השמאלית של הלוח, או אם כבר יש שם צריח להוריד אותו, זה לא ישביע על המשחק. נחלק את המשבצות לזוגות של משבצות צמודות: 0 ו-1, 2 ו-3, 4 ו-5, ..., כאשר המספור מתחיל בצד שמאל. נגיד המצב הוא פשוט, כאשר בכל זוג של משבצות יש מספר זוגי של כלים (0 או 2). במקרים אחרים נגיד שהמצב מורכב (כלומר כאשר באחד מהזוגות יש צריח אחד). אנחנו נוכיח כי:
מצב פשוט הוא מצב של ניצחון אם יש $4n$ צריחים, ומצב של הפסד אם יש $4n+2$ צריחים. מצב מורכב הוא מצב של ניצחון אם ורק אם XOR של מספרי משבצות של כל הצריחים מתאפס.

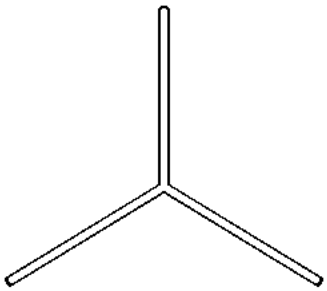
נוכיח את זה. נתחיל במצבים פשוטים. נראה, כי כל שחקן שלא רוצה לעשות מהלך אחרון, יכול בתורו לדאוג שהמצב יישאר פשוט, יכול ולדאוג שזוגיות של כמות הזוגות לאחר מהלך שלו תשמר.
כל שחקן כלשהו בתורו יכול לעשות אחד משלושה דברים: להעלים זוג כלשהו, להעביר צריח מזוג לזוג ריק שמאלי יותר, או על ידי צריח כלשהו לאכול צריח אחר בזוג אחר.
אם שחקן אחד הורג זוג כלשהו, אז אנחנו שוב במצב פשוט, אם זוגיות אחרת לכמות הזוגות. אם שחקן מעביר צריח מזוג A למשבצת ריקה בזוג אחר B, אז יריבו יכול להעביר את הצריח הנוסף מזוג A למשבצות כלשהי מזוג B. בצורה כזאת המצב יישאר פשוט, והשחקן השני יכול אפילו לבחור זוגיות (אם הוא יעביר את הצריח למשבצת ריקה, אז הזוגיות תשמר, ואם הוא יעביר את הצריח על הצריח שעשה את המהלך הקודם, הזוגיות תשתנה). מקרה בו אחד השחקנים מתחיל ממצב פשוט ומעלים שני צריכים בזוגות שונים דומה לחלוטין.
ובכן, אם יש מצב פשוט ויש $4n+2$ צריחים, אז השחקן השני יכול נצח: הוא יכול לשמור על כך, שאחרי כל מהלך שלו יישאר מצב פשוט עם מספר אי-זוגי של זוגות. בסופו של דבר יישאר זוג אחד בלבד, והשחקן הראשון במוקדם או במאוחר יצטרך להעלים אותו ולהפסיד. מצד שני, אם יש מצב פשוט עם $4n$ צריחים, אז הראשון יכול לנצח: הוא יעלים זוג צריכים צמודים, ויעביר את יריבו למצב מפסיד (ואת עצמו למצב מנצח).

נשים לב גם, שהשחקן לראשונה יצליח להעביר את המצב למצב פשוט, הוא גם זה שיכול לנצח. אכן, נסתכל על מהלך אחד לפני שהמצב נהיה פשוט. זאת אומרת, שחוץ משני צריכים, כל הצריכים האחרים כבר מסודרים בזוגות. במהלך האחרון, השחקן יכול או להעביר צריח לזוג שכבר יש בו צריח אחד (ולגרום מצב שכל הצריכים מסודרים בזוגות) או להרוג שני צריכים אחרונים שעדיין לא בזוג. כלומר, בכל מקרה, יש רק שני צריכים שעדיין בזוגות שונים, וכל הצריכים האחרים מסודרים בזוגות. לכן לשחקן שעושה את המהלך יש ברירה: הוא יכול לאחד את שני הצריחים או להעלים אותם. בשני המקרים הוא מקבל מצב פשוט, אב זוגיות של כמות הזוגות שונה. לכן במהלך זה השחקן יכול גם להעביר למצב פשוט וגם לבחור זוגיות. זאת אומרת , שהוא במצב מנצח.

נניח, שכל עוד המצב מורכב, אחד השחקנים מצליח לשמור על XOR אפסי לאחר מהלך שלו. אנחנו טוענים, שבמקרה זה השחקן השני יצטרך לאפשר לו בשלב מסוים לעבור למצב פשוט. כל מספר בינארי מורכב משני חלקים: הספרה האחרונה וכל הספרות האחרות. נשים לב שכל הספרות פרט לספרה האחרונה נותנות את המספר של זוג משבצות, בו נמצא הצריח. לכן במצב בפשוט ה-XOR של הכול הוא מספר חד-ספרתי, ששווה לזוגיות של כמות הזוגות. לכן השחקן שלראשונה יאפשר ליריבו לעבור למצב פשוט, יאפשר לו גם לעבור למצב עם XOR אפסי. לכן זה השחקן שכל פעם יתחיל ממצב של XOR אפסי, ולא השחקן שמצליח בכל מהלך שלו לעשות XOR אפסי.

זה סוגר את המקרה החד-מימדי. לגבי המקרה הדו-מימדי, אנחנו נרשום את התשובה ונשאיר את הבדיקה כתרגיל לקורא. כמו קודם, ניתן להניח שכמות הצריחים זוגית. נפצל את הלוח לריבועים 2×2. נפצל את המצבים לשני סוגים: מצבים פשוטים (כאשר בכל ריבוע יש מספר זוגי צח אם ורק אם של צריחים) ומצבים מורכבים (כאשר יש עדיין ריבועים עם מספר אי-זוגי של צריכים). עבור כל מצב פשוט נגדיר זוגיות של המצב, שזה זוגיות של כמות ריבועי הריצוף, שבהן יש 2 צריחים בדיוק, שנמצאים באותה שורה או עמודה.

התשובה היא: מצב פשוט הוא מצב אך ורק אם הוא אי-זוגי, ומצב מורכב הוא מצב מנצח אך ורק אם XOR של כל הקואורדינאטות של כל הצריכים מתאפס.



5. פושע ושוטר נמצאים בשלושה פרוזדורים באורך ℓ כל אחד, שמתחברים בקצה המשותף של כל הפרוזדורים (כמו בציור). שוטר מסוגל לרוץ פי 2 מהר יותר מהפושע. על מנת לראות את הפושע, השוטר צריך להימצא איתו באותו פרוזדור במרחק r ממנו או פחות. הוכיחו, שהשוטר יכול לתפוס את הפושע אם א. $r>\ell/5$, ב. $r>\ell/7$.

פתרון. אנחנו נסמן ב-A, B, C את קצוות הפרוזדורים, וב-O את נקודת מפגש המשותפת.

א. בהתחלה השוטר יגיע ל-C ואז ל-O. אם הוא לא יתפוס את הפושע כבר, זאת אומרת שהפושע נמצא בפרוזדור OA או OB במרחק גדול מ-r מנקודה O.
אחרי זה השוטר ירוץ מרחק r לתוך הפרוזדור OA ויחזור ל-O. אם פושע נמצא בפרוזדור OB אז הוא לא יספיק לעבור לפרוזדור OC בלי שהשוטר יראה אותו אם חזרתו ל-O. לכן אם השוטר לא רואה אותו אם חזרתו ל-O, אז או שהוא נמצא ב-OB במרחק גדול מ-r, או שהוא נמצא ב-OA במרחק גדול מ-$\frac{3}{2}r$.
נמשיך באותה שיטה: השוטר לחלופין יתעמק בפרוזדור OA ו-OB, ויחזור תמיד בזמן על מנת שאם הפושע היה בפרוזדור האחר הוא לא יספיק לעבור לפרוזדור OC בלי שהשוטר יראה אותו.
נניח למשל כי לאחר שלב מספר k השוטר חזר ל-O מפרוזדור OA, לאחר שבפרוזדור זה הוא הגיע למרחק y_k, וברגע זה הפושע היה במרחק לפחות y_k+r מ-O. כאשר השוטר יגיע ל-O, הוא ירוץ מרחק y_{k+1} לכיוון B ויחזור. מהרגע שהשוטר היה בתוך פרוזדור OA במרחק מכסימלי מ-O, עד הרגע שהוא יחזור ל-O פעם שנייה, הוא יעבור

מרחק $y_k + y_{k+1} + y_{k+1}$. הפושע יוכל לעבור אר מחצית מזה. חשוב לבחור את y_{k+1} על מנת שהפושע לא יוכל לעבור לפרוזדור OC ולהתקדם לכיוון C למרחק שעולה על r, ובשביל זה הוא צריך לעבור $y_k + 2r$ באותו הזמן.

לכן צריך להתקיים $y_k + 2r \geq \frac{y_k + 2y_{k+1}}{2}$, במילים אחרות $\frac{y_k}{2} + 2r \geq y_{k+1}$. כמובן שכל שוטר שאפתני יעדיף לבחור ב-y_{k+1} הגדול ביותר, ולכן $\frac{y_k + 4r}{2} = y_{k+1}$. כל פעם שלוקחים ממוצע בין y_k לבין $4r$, המספר מתקרב ל-$4r$ יותר ויותר. אם מתחילים מ-$y_1 = r$, אז לעולם לא נגיע בדיוק ל-$4r$, אבל נגיע קרוב ככל שנרצה. לכן כל עוד $\ell < 5r$, יגיע רגע שהשוטר יראה את הפרוזדורים OA ו-OB עד הסוף.
בזה פתרנו את סעיף א', אבל ברור שזה המקסימום שאפשר לקבל בשיטה שתיארנו, ועל מנת לפתור סעיף ב' צריך רעיון נוסף.

ב. נניח שלאחר k שלבים מהסוג שתיארנו בסעיף א', כאשר השוטר כבר יכול להתעמק ל-OA למרחק $4r - \varepsilon$ מ-O, ולחזור בלי לאפשר לפושע לעבור ל-OC (כי הפושע, אם הוא נמצא ב-OB, נמצא במרחק $3r - \varepsilon$ מ-O, כאשר בשוטר נמצא ב-O), השוטר יעשה דבר שונה: הוא יתקדם לכיוון A למרחק $\ell - r$ ויחזור ל-O. בצורה כזאת, אם השוטר נמצא בפרוזדור OA, השוטר יראה אותו ויתפוס אותו. יתכן אבל, שפושע יעבור לפרוזדור OC.
בזמן שהשוטר עבר את המרחק $\ell - r$ פעמיים, הפושע עלול לעבור את אותו המרחק פעם אחד. לכן אם הוא היה ב-OB במרחק $3r - \varepsilon$ מ-O, כעת הוא יכול להיכנס ל-OC למרחק $d = \ell - 4r + \varepsilon$ מ-O. אם $\ell < 7r$, אז $d < 3r + \varepsilon$. לכן בחזרתו ל-O, השוטר יודע, שהפושע לא יכול להיות ב-OA, לכן הוא ב-OA (במרחק שעולה על r) או ב-OC אבל לא רחוק מאוד (במרחק שלא עולה על d).
אם הפושע נמצא ב-OC, והשוטר ירוץ מרחק x_1 לכיוון C, הוא יתפוס יראה את הפושע כל עוד $x_1 + r \geq d + \frac{1}{2}x_1$, כלומר כאשר $x_1 = 2(d - r)$.
אבל, אחרי שהשוטר ירוץ מרחק x_1 לכיוון C ויחזור ל-O, יתכן כי הפושע יעבור מ-OA ל-OB, אבל רק למרחק $d_2 = x_1 - r$. קל לחשב כי אם $d = \ell - 4r + \varepsilon$ אז $x_1 = 2(d - r) = 2(\ell - 5r + \varepsilon)$ ואז $d_2 = x_1 - r = 2\ell - 11r + 2\varepsilon$.
ניתן להמשיך באותה צורה. בשלב מספר k מאז שעברנו לאסטרטגיה החדשה השוטר נמצא ב-O, הוא יודע בוודאות שהפושע לא יכול להיות בפרוזדור מסוים (OC או OB לחלופין, נגיד OC), הוא יכול להיות ב-OA בכל מרחק, שגדול מ-r (אחרת רואים אותו) או שהוא יכול להיות ב-OB נגיד במרחק שהוא מקסימום d_k אז השוטר יכול לבדוק את האפשרות של הפושע ב-OB: לשם כך הוא צריך לרוץ לכיוון B למרחק x_k ולחזור, כאשר $x_k = 2(d_k - r)$. בזמן זה הפושע יכול להישאר בפרוזדור OA או להיכנס לפרוזדור OC, אבל רק למרחק $d_{k+1} = x_k - r$. הגענו למצב דומה למצב הקודם, רק C במקום B וגם d_{k+1} במקום d_k.
האם המצב הזה יותר טוב? צריך להשוות בין d_{k+1} ל-d_k.
מחישובים שלנו עולה כי $d_{k+1} = x_k - r = 2d_k - 3r = d_k + (d_k - 3r)$.

לכן אם $d_k - 3r = \delta_k < 0$, אז המרחק יורד. נשים לב, שבמקרה זה δ_k נהיה יותר קטן משלב לשלב, לכן d_k ממשיך לרדת יותר ויותר מהר, ובכל מקרה מגיע לערך שלילי, זאת אומרת, שהפושע אינו יכול להיות לעבור מפרוזדור OA לפרוזדור אחר. במקרה זה השוטר יוכל לתפוס אותו בפרוזדור OA.
מצד שני, אם $\delta_k > 0$, אז d_k עולה, וגם δ_k עולה, ואז d_k ממשיך לעלות, ואז השיטה שלנו לא מובילה לפתרון.
בפעם הראשונה $\delta_1 = d - 3r = \ell - 7r + \varepsilon$ כאשר ε קטן כרצוננו. לכן כאשר $\ell < 7r$ ניתן לבחור ε קטן מספיק (לעשות מספיק שלבים בחלק הראשון של האסטרטגיה) ואז δ_1 יהיה שלילי ואז הפושע יטפס בחלק השני של האסטרטגיה.

6. משחק יקרא חסום, אם הוא חייב להסתיים אחרי מספר סופי של מהלכים בלי קשר לחוכמתם או פיגור השכלי של שני השחקנים (למשל אותלו מסתיים לאחר 60 מהלכים לכל היותר, ולכן הוא משחק חסום, ואבלון עלול להסתיים רק עם סגירת המועדון). נגדיר מטמשחק, שמתנהל לפי הכללים הבאים: הראשון בוחר משחק חסום, ואז מתחילים לשחק במשחק זה (כאשר השני עושה את מתחיל). האם מטמשחק הוא משחק חסום?

"*when you have eliminated the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth*" (Sherlock Holmes)
פתרון. אחרי שהראשון בוחר משחק, נשאר רק מספר סופי של מהלכים. לכן מטמשחק מסתיים אחרי משחק סופי של מהלכים, ולכן מטמשחק לא יכול להיות משחק לא חסום.
מצד שני, אם מטמשחק הוא משחק חסום, אז הראשון יכול להציע במהלך הראשון שלו לשחק מטמשחק, ואז השני יכול בתורו להציע לראשון לשחק מטמשחק, וכך הם יכולים עד אינסוף להציע אחד לשני לשחק מטמשחק כמו שני ילדים מפגרים. לכן לא יתכן שמטמשחק הוא משחק חסום.

זה מוביל לפרדוקס, דומה לפרדוקס של ראסל על "קבוצת כל הקבוצות". כיצד יתכן, שמשחק זה אינו חסום ואינו לא חסום?

במקרה כזה צריך לחפש הנחה סמויה שקרית בגוף השאלה. ההנחה השקרית במקרה זה היא שמטמשחק הוא משחק. משחק זה מושג מתמטי מוגדר היטב, שמסתמך על מושג ה***קבוצה***: במשחק כל שחקן בוחר מהלך מבין ***קבוצת*** המהלכים האפשריים. קבוצת כל המשחקים האפשריים לא מוגדרת (ואפילו לא קבוצת כל המשחקים החסומים), ולכן מטמשחק אינו משחק.