תרגיל 10

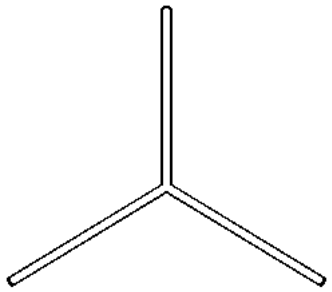
משחקים

1. על הלוח כתובים שני מספרים: 5773 ו-1000. בכל מהלך אפשר לרשום על הלוח מספר טבעי, שהוא הפרש של שני מספרים שכבר רשומים, בתנאי שהוא לא מופיע עדיין. שניים מבצעים מהלכים מסוג זה לפי התור. מפסיד מי שלא יכול לעשות מהלך. מי מנצח, הראשון או השני?

2. שני חכמים משחקים. בתחילת המשחק רשומים המספרים הטבעיים מ-0 עד 1024 כולל. בהתחלה, הראשון מוחק 512 מספרים. השני מוחק 256 מספרים. אז הראשון מוחק 128 מספרים, והשני מוחק 64 מספרים, וכך הלאה, עד שנשארים שני מספרים בלבד. בסוף המשחק החכם השני משלם לראשון את ההפרש בין המספרים.
כמה הוא הולך לשלם לו?

3. א. במשחק נים יש n ערמות של $a_1,...,a_n$ אבנים, כאשר בכל ערמה. שניים משחקים לפי התור. בכל מהלך ניתן להוציא כמות כלשהי (גדולה מ-0) של אבנים מערמה אחת לפי בחירת השחקן. מנצח מי שלוקח את האבן האחרונה. הוכח כי הראשון יכול לנצח אך ורק כאשר $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n = 0$.
(תזכורת: $\oplus$ זו פעולת XOR, כלומר חיבור בינארי בכל ספרה בנפרד, ללא מעברים. למשל $12 = 1100_2 = 1011_2 + 111_2 = 11 + 7$).
ב. נתבונן במשחק אחר, בו מהלכים מתבצעים לפי אותם כללים, אבל המטרה היא הפוכה: מי שלוקח את האבן האחרונה מפסיד. באיזה מצבים הראשון יוכל לנצח במשחק החדש?

4. על הלוח נמצאים מספר כלי משחק על משבצות שונות. בתורו, כל שחקן צריך להזיז כלי אחד שמאלה בתוך שורה או למעטה בתוך עמודה לפי בחירתו. מותר לדלג מעל כלים אחרים, אבל אם הכלי מגיע למשבצת בה כבר יש כלי, צריך להוריד את שני הכלים מהלוח. מי מנצח במשחק אם
א. אם מטרת המשחק היא לעשות את המהלך האחרון, למי יש אסטרטגיה מנצחת?
ב**. אם מטרת המשחק היא לא לעשות את המהלך האחרון, למי יש אסטרטגיה מנצחת?



5. פושע ושוטר נמצאים בשלושה פרוזדורים באורך ℓ כל אחד, שמתחברים בקצה המשותף של כל הפרוזדורים (כמו בציור). שוטר מסוגל לרוץ פי 2 מהר יותר מהפושע. על מנת לראות את הפושע, השוטר צריך להימצא איתו באותו פרוזדור במרחק r ממנו או פחות. הוכיחו, שהשוטר יוכל לתפוס את הפושע אם א. $r > \ell/5$, ב. $r > \ell/7$.

6. משחק יקרא חסום, אם הוא חייב להסתיים אחרי מספר סופי של מהלכים בלי קשר לחוכמתם או פיגור השכלי של שני השחקנים (למשל אותלו מסתיים לאחר 60 מהלכים לכל היותר, ולכן הוא משחק חסום, ואבלון עלול להסתיים רק עם סגירת המועדון). נגדיר מטמשחק, שמתנהל לפי הכללים הבאים: הראשון בוחר משחק חסום, ואז מתחילים לשחק במשחק זה (כאשר השני עושה את מתחיל). האם מטמשחק הוא משחק חסום?