<u>תרגיל 1 – גרפים</u>

נזכיר שגרף זה אוסף של נקודות (קודקודים) ביחד עם קשתות שמחברים אותם. דרגה של קודקוד זה כמות הקשתות שמחוברות אליו.

1. הוכיחו שלכל עץ יש לפחות שני עלים (כאשר עץ זה גרף ללא מעגלים, ועלה זה קודקוד שהדרגה שלו 1). הוכיחו שאם יש בדיוק שני עלים, אז כל הקודקודים האחרים הם מדרגה 2.

2. בממלכה 8 ערים. המלך רוצה להקים מערכת כבישים, כך שמכל עיר לכל עיר יהיה אפשר להגיע, כך שבדרך לא יהיה צריך לעבור ביותר מאשר עיר נוספת אחת, וכך שמכל עיר יצאו K כבישים לכל היותר. עבור אילו K זה יתכן?

3. חברת תעופה מקיימת מספר טיסות בין הערים במדינה מסוימת, ומכל עיר אפשר להגיע לכל עיר. בשנה הבאה החברה מתכוונת להוסיף עוד קו טיסה, ואז יהיה אפשר להגיע מכל עיר לכל עיר אחרת ב-17 טיסות לכל היותר. מהו מספר מכסימלי של טיסות כרגע שמספיקות בשביל להגיע מכל עיר לכל עיר אחרת (במקרה הגרוע)?

4. נתונים 7 אנשים, שמבין $\binom{7}{2}$ זוגות שהם יוצרים יש N זוגות של חברים. עבור ערך קטן ביותר של N ניתן לטעון, שאפשר להושיב את 7 האנשים מסביב לשולחן עגול, כך שליד כל אחד ישבו חברים שלו?

5*. נתון גרף G שקבוצת הקודקודים שלו היא V. הוכיחו שאפשר לפרק אותו ל-k יערות (במילים אחרות לצבוע אותו ב-k צבעים כך שאין מעגל באף צבע) אם ורק אם בכל תת-גרף שנוצר על תת-קבוצה של קודקודים $U \subset V$ יש לכל היותר $k(|U|-1)$ קשתות.

6. נתון גרף מישורי פשוט לא מכוון. הוכיחו שאפשר לכוון את הקשתות, כך שמכל קודקוד יצאו לכל היותר 3 קשתות.