פיראטים

בעיה מרכזית. שני פיראטים חמדנים מחלקים מטמון. לכל חתיכה של מטמון, כל פיראט מסוגל להעריך את המחיר שלה בדולרים וביורו לפי דעתו (היחס בין המחירים לא קבוע). ההערכות של שני הפיראטים יכולות להיות שונות (ואף פיראט לא מכיר את ההערכות של אף פיראט אחר). כל חלק אפשר לחתוך לחלקים יותר קטנים. כל פיראט רוצה לקבל לפחות חצי לפי דעתו (גם ביורו, וגם בדולרים). בכל שלב של החלוקה אחד הפיראטים מחלק את אחד החלקים לשני חלקים יותר קטנים. אם ברגע מסוים ניתן לפלג את החלקים כך ששניהם יהיו מרוצים, החלוקה הסתיימה.

א. הוכח כי יתכן שהחלוקה לא תסתיים אף פעם, עם כל הרצון הטוב.

ב. אם הפיראטים מוכנים לוותר ולקבל רק 49% מהמטמון, אז אפשרי לבצע את החלוקה.

ג. הוכח כי ניתן לפתור את הסעיף הקודם, גם אם יש 5 סוגי מטבע (למשל גם דינארים, שקלים ולירות).

ד. אותו דבר, אבל במקרה שיש חמישה שודדים ולא שניים, וכל אחד מוכן לקבל 19.9% מהמטמון.

1. לפיראטים יש 301 ארגזים עם מטמון: בכל ארגז יש כמות מסוימת של זהב וכמות מסוימת של רום. רב חובל ג'ק ספרואו לוקח 151 ארגזים לפי בחירתו.

א. הוכיחו כי הוא יכול לקבל גם את רוב הזהב וגם את רוב הרום בו-זמנית.

ב. מהי כמות הארגזים המינימאלית שעבורה נוכל לפחות שליש של זהב ולפחות שליש של רום. מה לגבי שני שליש?

ג. אותה שאלה עבור 2/5.

ד. אותה שאלה עבור 2/5, אם יש 303 ארגזים.

2. אותם שאלות כמו בשאלה 1, אבל כאשר בארגזים יש שלשה סוגי משאבים (גם אבקת שרפה).

3. נתונה כמות זוגית של ארגזים, ובכל אחד מהם יש לא יותר מקילוגרם של זהב ולא יותר מקילוגרם של רום.

א. אפשר לחלק את הארגזים ל2 קבוצות באותו גודל כך שההפרש בין כמויות הזהב בקבוצות לא עולה על 1 וגם הפרש בין כמויות רום לא עולה על 1.

ב. אותו דבר לכמות כלשהי של קבוצות.

ג. הוכח כי קיים קבוע c_k שתלוי רק בכמות המשאבים ולא תלוי בכמות הארגזים, בעל תכונה הבאה: אם בכל ארגז יש לא יותר מ1 קילוגרם של כל אחד מהמשאבים, אז אפשר לחלק את הארגזים ל2 קבוצות כך שההפרשים של כמויות המשאבים בין הקבוצות יהיו לא גדולים מc_k.

ד. אותה שאלה עבור חלוקה ל-m קבוצות.

הגרסה הכללית של הבעיה המרכזית:

נתונים N ארגזים עם k סוגים של משאבים. ג'ק ספרואו רוצה לבחור חלק מהארגזים, כך שהחלק היחסי של כל אחד מהמשאבים יהיה לא פחות מ-α.

נסמן ב-$f_{N,k}(\alpha)$ את הכמות המינימאלית של ארגזים שבטוח מספיקה בשביל לקבל לפחות α מכל משאב.

4. הוכח כי קיים קבוע $d_{k,m}$ שתלוי רק ב-k ו-m, כך ש-$f_{N,k}\left(\frac{1}{m}\right) \leq \frac{N}{m} + d_{k,m}$.

5.א. ב-N ארגזים יש זהב ורום, כך שהמשקל הכולל של כל ארגז הוא 1ק"ג.

הוכיחו, כי הרב חובל ג'ק ספרואו יכול להוציא מחלק מהארגזים רק זהב, ומשאר הארגזים רק רום, כך שבסה"כ בארגזים יישאר לא יותר מ-$\frac{N+1}{4}$ ק"ג של זהב ולא יותר מ-$\frac{N+1}{4}$ ק"ג של רום.

ב. ב-N ארגזים יש 4 סוגי משאבים, כך שהמשקל הכולל של כל ארגז הוא 1ק"ג.

הרב חובל ג'ק ספרואו רוצה להוציא 2 משאבים מכל ארגז כך שבארגזים יישאר לא יותר מ-α ק"ג של כל משאב. לאילו ערכים של α זה אפשרי?

ג. ומה אם יש k סוגים של משאבים, וצריך להוציא $k-1$?

ד. ומה אם יש k סוגים של משאבים, וצריך להוציא l?

6. הוכח לגבי c_k של שאלה 3ג:

א. $c_k \leq k$

ב. $c_k \leq \frac{k+1}{2}$

ג. האם אפשר למצוא חסם יותר קטן ל-c_k? (כנראה שכן)

7. לגבי N-ים מספיק גדולים, הוכח כי:

א. $f_{N,k}\left(\frac{1}{2}\right) = k + \left\lfloor \frac{N-k}{2} \right\rfloor$

ב. $f_{N,k}\left(\frac{1}{3}\right) = k + \left\lfloor \frac{N-k}{3} \right\rfloor$

ג. $f_{N,k}\left(\frac{2}{3}\right) = k + \left\lfloor \frac{2N-k}{3} \right\rfloor$

ד. $f_{N,k}\left(\frac{p}{q}\right) = k + \left\lfloor \frac{pN-k}{q} \right\rfloor$