תרגיל בתורת המספרים

1. מצא את כל הזוגות (m,n) של שלמים המקיימים $1+2^m+2^{2m+1}=n^2$.

2. הוכח כי לכל ראשוני p קיים ראשוני q, כך ש-n^p-p אינו מתחלק ב-q לאף n.

3. הטבעיים a,b מקיימים שהמספרים $15a+16b$ ו-$16a-15b$ שניהם ריבועים.
מצא את הערך המינימלי האפשרי של המספר הקטן מבין שני הריבועים האלה.

4. הוכח כי יש אינסוף שלמים חיוביים n עבורם למספר n^2+1 יש מחלק ראשוני העולה על $2n+\sqrt{2n}$.

5. מצא את כל זוגות הטבעיים (a,b) עבורם $ab^2+b+7 \mid a^2b+a+b$.

6. מצא את המספר n המינימאלי, עבורו קיימים טבעיים $s_1<s_2<\ldots<s_n$ המקיימים:
$$\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{s_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{s_n}\right)=\frac{51}{2010}.$$

7. מצא את כל הזוגות (m,n) של שלמים המקיימים $m^2+2\cdot 3^n=m\cdot\left(2^{n+1}-1\right)$.

8. גם שורות וגם עמודות של טבלא $2^n\times 2^n$ מוספרו מ-0 עד 2^n-1, וכך כל משבצת מוגדרת על ידי זוג מספרים, וכל זוג מספרים שלמים מגדים משבצת, כאשר מסתכלים על המספרים מודולו 2^n. משבצות הטבלא נצבעו, כך שהמשבצת (i,j) היא באותו צבע כמו $(j,i+j)$. הוכח כי הכמות המקסימאלית האפשרית של הצבעים היא 2^n.