אי-שוויונים

קבוצת רותם

מחנה חורף תשע"ג

1. בהינתן $a,b,c>0$ הוכח כי $\frac{ab}{\sqrt{2c^2+ab}}+\frac{ac}{\sqrt{2b^2+ac}}+\frac{bc}{\sqrt{2a^2+bc}}\geq\sqrt{ab+bc+ca}$.

2. בהינתן $a,b,c\in[0,1]$ הוכח כי $a+b+c-a^2b^2c^2\leq\frac{9}{4}$.

3. הוכח כי בכל משולש $\frac{3}{5}\leq\frac{h_a-2r}{h_a+2r}+\frac{h_b-2r}{h_b+2r}+\frac{h_c-2r}{h_c+2r}\leq 1$.

4. בהינתן $a,b,c\in[0,1]$ המקיימים $a+b+c=2$ הוכח כי $ab+ac+bc\leq abc+\frac{28}{27}$.

5. עבור $a,b,c>0$ המקיימים $abc=1$ הוכח כי $\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{b^2+bc}+\frac{1}{c^2+ca}\geq\frac{3}{2}$.

6. בהינתן $a,b,c,d>0$ עבורן $abcd=1$ הוכח כי $\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\geq 4$.

7. עבור $a,b,c>0$ הוכח כי $\frac{1}{a^3+4}+\frac{1}{b^3+4}+\frac{1}{c^3+4}\geq\min\left\{\frac{1}{4},\frac{3}{abc+4}\right\}$.

8. עבור $x,y,z>0$ המקיימים $xyz=x+y+z+2$, הוכח כי
$x+y+z+6\geq 2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}\right)$.

9. עבור $a,b,c>0$ המקיימים $a^2+b^2+c^2+abc=4$ הוכח כי $a+b+c\leq 3$.

10. עבור $a,b,c>0$ המקיימים $a^2+b^2+c^2+abc=4$ הוכח כי $2+abc\geq ab+ac+bc$.

11. עבור $a,b,c,x,y,z>0$ המקיימים $a+b+c=x+y+z$ הוכח כי
$ax^2+by^2+cz^2+xyz\geq 4abc$.

12. עבור $a,b,c>0$ הוכח כי $\frac{a+b}{\sqrt{c^2+3ab}}+\frac{a+c}{\sqrt{b^2+3ac}}+\frac{b+c}{\sqrt{a^2+3bc}}\geq 3$.

13. עבור $a,b,c\in\mathbb{R}$ המקיימים $ab+ac+bc+2abc=1$ הוכח כי
$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq\frac{3}{4}$.