תרגיל אי-שוויונים

1. נתון: $0 \le x,y,z \le 1$, וגם $xy+xz+yz=1$. הוכח כי $x+y+z \le 2$.

2. בהינתן $a,b,c>0$ הוכח כי $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge \sum_{cyc}\sqrt{2a^2-3ab+2b^2}$.

3. נתון: $a,b,c,d>0$, וגם $3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=\left(a+b+c+d\right)^2$.
הוכח כי $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \le \frac{a+c}{c+d} \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

4. נתונים $x_1,x_2,...,x_n>0$ המקיימים $x_1x_2\cdot...\cdot x_n=1$.
הוכח כי $\frac{1}{x_1\left(x_1+1\right)}+\frac{1}{x_2\left(x_2+1\right)}+...+\frac{1}{x_n\left(x_n+1\right)} \ge \frac{n}{2}$.

5. לכל $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ הוכח כי
$a^4+b^4+c^4+d^4+4abcd \ge 2\left(a^2bd+b^2ca+c^2db+d^2ac\right)$.

6. נתונים $a_i \in \left[0,i\right]$ לכל $i \in \left\{1,2,...,n\right\}$. הוכח כי
$2^n a_1\left(a_1+a_2\right)\left(a_1+a_2+a_3\right)\cdot...\cdot\left(a_1+a_2+...+a_n\right) \ge \left(n+1\right)a_1^2a_2^2\cdot...\cdot a_n^2$.

7. נתון: $x,y,z \ge 0$, וגם $x+y+z=3$. הוכח כי
$x\sqrt{x+y}+y\sqrt{y+z}+z\sqrt{z+x} \ge 3\sqrt{2}$.

8. הוכח כי עבור התיכונים של משולש שהיקפו 2, מתקיים $\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c} \ge 5$.

---

9. לכל משולש הוכח כי $\frac{r_a}{r_a+h_a}+\sin\beta\sin\gamma \le \frac{5}{4}$.

10. נתון: $0 \le a,b,c$, וגם $a+b+c=1$. מצא את הערך המרבי של הביטוי
$a\left(b-c\right)^4+b\left(c-a\right)^4+c\left(a-b\right)^4$.

11. בהינתן $a,b,c \ge 0$ הוכח כי
$a^4+b^4+c^4+d^4+4abcd \ge 2\left(a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab\right)$.