תרגיל בנושא משוואות פונקציונליות

תרגיל 1

מצאו את כל האוטומורפיזמים של $\mathbb{R}$, זאת אמרת כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שמקיימות את התנאים ההבאים

א) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

ב) $f(xy)=f(x)f(y)$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

ג) f חח"ע ועל.

תרגיל 2

מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש-

א) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

ב) f חסומה על קטע $[0,1]$.

תרגיל 3

מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שמקיימות משוואה פונקציונלית הבאה

$f\left(x^2+f(y)\right)=y+f(x)^2$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

תרגיל 4

מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ כך ש-

א) $f(xyz)+f(x)+f(y)+f(z)=f\left(\sqrt{xy}\right)f\left(\sqrt{yz}\right)f\left(\sqrt{zx}\right)$. לכל $x,y\in\mathbb{R}^+$

ב) $f(x)<f(y)$ לכל $1\le x<y$.

תרגיל 5

מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שמקיימות משוואה פונקציונלית הבאה

$f\left(x^2+y^2+2f(xy)\right)=f(x+y)^2$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

תרגיל 6

מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שמקיימות משוואה פונקציונלית הבאה

$f\left(x-f(y)\right)=f\left(f(y)\right)+xf(y)+f(x)-1$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

תרגיל 7

הגדרה: $\mathbb{Q}_p$ – שדה המספרים ה p-אדיים. זוהי השלמה של $\mathbb{Q}$ ביחס למטריקה $d_p(x,y)=|x-y|_p$ כאשר $\left|\frac{a}{b}\right|_p=p^{ord_p(b)-ord_p(a)}$.

דוגמאות: עבור $p=2$ $d_2\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right)=\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right|_2=\left|\frac{2}{15}\right|_2=\frac{1}{2}$.

$$|501|_2=1\,,\left|\frac{17}{64}\right|_2=64$$

מצאו את כל האוטומורפיזמים של $\mathbb{Q}_p$ (ראו תרגיל 1).

תרגילים נוספים בנושא מספרים פיאדיים

1) יהי p ראשוני. הוכיחו שהסכום $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n!$ מתכנס ב- $\mathbb{Q}_p$ ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n! = -1$.
2) הראו שלכל n קיים $x_n \in \mathbb{Z}$ כך ש- $x_n{}^n + 1 = 0 (mod\ 5^n)$. הראו באינדוקציה שאפשר לבנות את הסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $x_{n+1} = x_n (mod\ 5^n)$.
הסיקו ש- $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ הוא איבר ב- $\mathbb{Q}_5$. איזו משוואה מתקיימת עבור x?
3) חשבו באופן מפורש, ז"א כתבו פיתוח פי-אדי $x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n + \cdots$, כאשר $a_i \in \{0,1,2, \dots, p-1\}$, עבור שלמים פי-אדיים הבאים :
א) $\frac{1}{3}$ ב-$\mathbb{Q}_5$.
ב) $\frac{1}{3}$ ב-$\mathbb{Q}_2$.
ג) $\frac{1}{2}$ ב-$\mathbb{Q}_3$.
ד) 125 ב-$\mathbb{Q}_2$.
ה) -10 ב-$\mathbb{Q}_3$.
4) יהי F שדה מקרקטריטיקה 0, זאת אומרת $\mathbb{Q} \subseteq F$. תהי $|\cdot| : F \to \mathbb{R}$ פונקצית נורמה על F, כלומר פונקציה עם התכונות ההבאות
א) $|x| \geq 0$ לכל $x \in F$ וגם $|x| = 0$ אם ורק אם $x = 0$.
ב) $|xy| = |x||y|$ לכל $x, y \in F$.
ג) $|x + y| \leq |x| + |y|$.
נניח $|n| \leq 1$ לכל $n \in \mathbb{Z}$. הוכיחו שאז $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ לכל $x, y \in F$.

רמז : נסו למצוא הערכה טובה ל- $|x + y|^n$ לכל n טבעי, ואז להשאיף $n \to \infty$.
<u>הערה</u> : פונקצית נורמה עם התכונות שבתרגיל נקראת ולואציה לא-ארכימדית על F.