י''ז בשבט 28.1.13

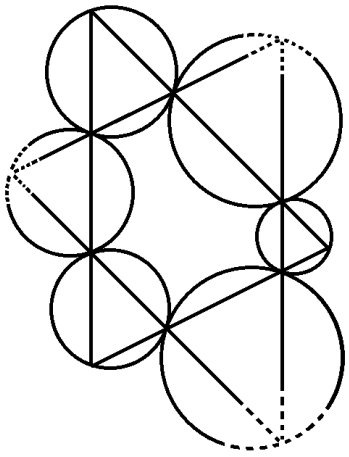
קבוצת ירדן, מחנה חורף

אין להשתמש במחשבון

1. מצא\י את כל השלשות של מספרים טבעיים, כך שהסכום של כל שניים מהם מתחלק במספר הנוסף.

2. א. האם לכל משושה קמור ניתן לרצף את המישור במשושים שחופפים לו?
ב. האם לכל משושה קמור שכל שתי צלעות נגדיות שלו מקבילות ניתן לרצף את המישור במשושים שחופפים לו?

3. הוכח כי לכל $\ell > n > 1$ מתקיימת הזהות $\binom{\ell-1}{n} = \binom{n+1}{n-j}\binom{\ell+j}{n}(-1)^j$ $\sum_{j=0}^{n}$.



4. בציור נמצאים 6 מעגלים שמשיקים באופן חיצוני בסדר מעגלי: מעגל ראשון משיק למעגל שני בנקודה A, מעגל שני משיק לשלישי ב-B, מעגל שלישי משיק לרביעי ב-C, רביעי משיק לחמישי ב-D, חמישי משיק לשישי ב-E, ושישי משיק לראשון ב-F. נקודת חיתוך של הישרים AB ו-CD נמצאת על המעגל השלישי, נקודת חיתוך של הישרים CD ו-EF נמצאת על המעגל החמישי, נקודת חיתוך של EF ו-AB נמצאת על המעגל הראשון. הוכיחו כי גם נקודות החיתוך של הישרים BC, DE, FA נמצאים על המעגלים הנתונים.

בהצלחה!

י"ט בשבט 30.1.13

קבוצת ירדן, מחנה חורף

אין להשתמש במחשבון

1. נתון פולינום p מתוקן (מקדם מוביל = 1) שדרגתו גדולה מ-0. האם יתכן, שלכל x שלם או חצי-שלם, $p(x)$ יהיה מספר שלם?

2. משחק "אסור לאיים" מתנהל על לוח משבצות $m\times n$. שני שחקנים, הראשון והשני, מניחים לפי התור פרשי שח על משבצות הלוח: הראשון מניח פרשים לבנים, והשני פרשים שחורים. אסור להניח פרש על משבצת שכבר נתפסה. השחקן שמניח פרש, שמאיים על פרש של השחקן האחר, מפסיד. לאיזה שחקן יש אסטרטגיה מנצחת: לראשון או לשני? (התשובה יכולה להיות תלויה ב- m,n).

3. נסמן:

$$R=\sqrt[3]{29\cdot\sqrt{8}-31\cdot\sqrt{7}}+\sqrt[3]{25\cdot\sqrt{7}-27\cdot\sqrt{6}}+\sqrt[3]{21\cdot\sqrt{6}-23\cdot\sqrt{5}}+$$
$$+\sqrt[3]{17\cdot\sqrt{5}-19\cdot\sqrt{4}}+\sqrt[3]{13\cdot\sqrt{4}-15\cdot\sqrt{3}}+\sqrt[3]{9\cdot\sqrt{3}-11\cdot\sqrt{2}}$$

חשב\י את R^2 (יש לתת תשובה מפורשת, כמו 3.57 ולא ביטוי).

4. אמצעי המקצועות של ארבעון ABCD (לאו דווקא משוכלל) נמצאים על קליפה כדורית. נסמן ב-H את נקודת מפגש הגבהים של המשולש ABC. הוכח\י כי DH מאונך למישור ABC.

בהצלחה!

כ' בשבט 31.1.13

קבוצת ירדן, מחנה חורף

אין להשתמש במחשבון

1. למסיבה מוזמנים N אנשים. לאיזה N הכי גדול אי-אפשר להושיב אותם סביב מספר שולחנות עגולים, כך שליד כל שולחן ישבו 10, 11 או 12 אנשים (לאו דווקא אותו מספר מסביב לכל שולחן).

2. א. כמה מבין מקדמי הפולינום $x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+9)$ מתחלקים ב-3?

ב. אותה שאלה עבור $x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+99)$.

3. במשולש ABC נקודה H היא נקודת מפגש הגבהים.
נניח כי $AH\cdot BC = BH\cdot AC$. הוכח\י כי $AC = BC$.

4. שתי סדרות מוגדרות ע"י תנאי התחלה $\begin{cases} a_1 = 1000 \\ b_1 = 1 \end{cases}$ ונוסחאות נסיגה $\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 - b_n^2 \\ b_{n+1} = 2a_n b_n \end{cases}$.

מה גדול יותר: a_{10} או b_{10}?

בהצלחה!