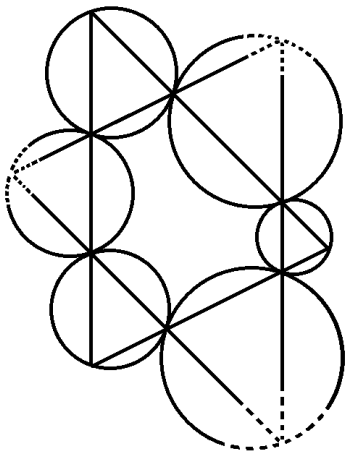
י''ז בשבט 28.1.13

קבוצת רותם, מחנה חורף

אין להשתמש במחשבון

1. הוכח כי לכל $\ell > n > 1$ מתקיימת הזהות $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{\ell+j}{n}\binom{n+1}{n-j}=\binom{\ell-1}{n}$.



2. בציור נמצאים 6 מעגלים שמשיקים באופן חיצוני בסדר מעגלי: מעגל ראשון משיק למעגל שני בנקודה A, מעגל שני משיק לשלישי ב-B, מעגל שלישי משיק לרביעי ב-C, רביעי משיק לחמישי ב-D, חמישי משיק לשישי ב-E, ושישי משיק לראשון ב-F. נקודת חיתוך של הישרים AB ו-CD נמצאת על המעגל השלישי, נקודת חיתוך של הישרים CD ו-EF נמצאת על המעגל החמישי, נקודת חיתוך של EF ו-AB נמצאת על המעגל הראשון. הוכיחו כי גם נקודות החיתוך של הישרים BC, DE, FA נמצאים על המעגלים הנתונים.

3. האם ניתן לצייר דיאגראמה של 11 נקודות במישור, הממוספרות על ידי מספרים מ-0 עד 10, כך ששלוש נקודות שונות יהיו על ישר אחד אם ורק אם סכום מספריהם מתחלק ב-11?

בהצלחה!

י"ט בשבט 30.1.13

קבוצת רותם, מחנה חורף

1. ABCD מרובע חסום שאלכסוניו נפגשים בנקודה E. המשכי הצלעות AD, BC מעבר לנקודות A, B בהתאמה נפגשים בנקודה F. בנוסף נגדיר נקודה G, עבורה ECGD היא מקבילית, ונקודה H שהיא שיקוף של E יחסית ל-AD. הוכח כי D, H, F, G נמצאות על מעגל אחד.

2. המטה הכללי של מדינה זרה מורכב מ-2012 מדורים המסודרים במעגל ו-$N \geq 2012$ חיילים. בתחילה, קצין השלישות מחלק את החיילים בין המדורים באיזה אופן שהוא בוחר, כך שבכל מדור יש לפחות חייל אחד. בכל יום ויום, קצינת הת"ש מחליטה להעביר בדיוק חייל אחד מכל מדור למדור סמוך, ומדווחת על כך לקצין השלישות. לאחר מכן יכול קצין השלישות להעביר לכל היותר חייל אחד מכל מדור, למדור סמוך – בתנאי שלא הועבר קודם לכן באותו היום על ידי קצינת הת"ש.
מטרתו של קצין השלישות היא לדאוג לכך שבכל יום ישרת בכל מדור לפחות חייל אחד.
עבור איזה N מינימאלי, יוכל בוודאות קצין השלישות לעמוד במשימתו?

3. יהיו x, y שלמים וחיוביים. נניח כי $x^{2^n}-1$ מתחלק ב-$2^n y+1$ לכל n שלם וחיובי.
הוכח כי $x=1$.

בהצלחה!

כ בשבט 31.1.13

קבוצת רותם, מחנה חורף

1. האם ניתן לפצל
   א. את $\mathbb{Z}$
   ב. את $\mathbb{Q}$

לאיחוד זר של שלוש קבוצות לא ריקות, A,B,C, עבורן שלושת הקבוצות $A+B$, $A+C$, $B+C$ תהיינה זרות בזוגות?

2. במשולש חד-זוויות ABC הנקודות D, E, F הם עקבי הגבהים מ-A, B, C בהתאמה.
מרכזי המעגלים החסומים של המשולשים AEF, BDF הם I_1, I_2 בהתאמה.
מרכזי המעגלים החוסמים של ACI_1, BCI_2 הם O_1, O_2 בהתאמה.
הוכח כי I_1I_2 מקביל ל-O_1O_2.

3. מצא את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורן $f(-1)\neq 0$ ולכל x,y מתקיים
$$f(1+xy)-f(x+y)=f(x)f(y).$$

בהצלחה!