# י''ח בשבט 29.1.13

## תחרות קבוצתית

## אין להשתמש במחשבון או במחשב או בספר התמונות

**1.** (10 נק') רדיוס המעגל החסום קטן פי 2.5 מרדיוס המעגל החוסם של משולש ישר זווית. מצאו את שטחו, אם האורך של אחד הניצבים הוא 12.

**2.** (10 נק') חשב את ערך הביטוי:

$$\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1443}+\frac{1}{1444}-\frac{1}{2889}+\frac{1}{2890}-\ldots-\frac{1}{5775}+\frac{1}{5776}}{3\left(\frac{1}{1\cdot 4333}+\frac{1}{2\cdot 4334}+\ldots+\frac{1}{1444\cdot 5776}\right)+\frac{1}{1445\cdot 2889}+\frac{1}{1446\cdot 2890}+\ldots+\frac{1}{2888\cdot 4332}}.$$

**3.** (10 נק') נתון פאון קמור שיש לו 7 קודקודים.
א. מה המספר המינימלי של פאות שעלולות להיות לו?
ב. מה המספר המקסימלי של פאות שעלולות להיות לו?

**4.** (15 נק') הוכיחו כי $\binom{n-1}{m-1}$ מתחלק ב-$\frac{m}{(m,n)}$ עבור כל $n>m$ שלמים. (נזכיר כי $(m,n)$ מסמן את המחלק המשותף המרבי של המספרים $m,n$.)

**5.** (15 נק') אבי ובני הולכים לקזינו. אבי משתתף ב-10 משחקים, הממוספרים מ-1 עד 10. במשחק מספר K הוא זוכה במספר אי-שלילי שלם של שקלים שקטן מ-K, כאשר מספר מ-0 עד K-1 מתקבל בסיכוי שווה. בני משתתף במשחק יחיד: במשחק זה מגרילים תמורה של המספרים מ-1 עד 10, והוא מקבל כמות שקלים ששווה למספר הזוגות ההפוכים בתמורה זאת (זוג מספרים נקרא הפוך, אם המספר הגדול נמצא לפני הקטן). למי יש סיכוי יותר טוב לקבל מעל 17 שקלים: לאבי או לבני?

**6.** (15 נק') נתונים 5 מעגלים $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$. הזוגות $(\alpha,\beta)$ , $(\beta,\gamma)$ , $(\gamma,\delta)$ משיקים באופן חיצוני בנקודות A, B, C. המעגלים $\alpha,\delta$ משיקים ל-$\varepsilon$ באופן פנימי בנקודות D, E. הנקודות A, B, C, D, E נמצאים על מעגל אחד. הוכיחו: קיים מעגל שמשיק בו-זמנית לארבעה המעגלים $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.

**7.** (15 נק') נתונים 2012 וקטורים במרחב תלת מימדי. סכום הווקטורים שונה מ-0. אבי ובני משחקים. כל אחד מבין השחקנים בתורו משייך לעצמו אחד מהווקטורים. אחרי שכל הווקטורים חולקו, מנצח זה שסכום הווקטורים שלו ארוך יותר. מי מנצח במשחק? (התשובה עלולה להיות תלויה בסוג הווקטורים).

**8.** (15 נק') האם $\frac{5774^5-1}{5773}$ ראשוני?

**9.** (20 נק') הוכיחו את הזהות: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^3=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\cdot\binom{2k}{n}$.

**10.** (20 נק') נתונים n מספרים מרוכבים $a_1,...,a_n$.
רוצים לבנות פולינום $p(z)$ בעל מקדמים מרוכבים שיקיים את התנאים הבאים:
(א) $p(a_i)$ ממשי לכל $i$.
(ב) לכל $z$ עבורו $p'(z)=0$, מתקיים ש-$p(z)$ ממשי.
הוכיחו כי שקיים פולינום מדרגה $2^n$ שמקיים את שני התנאים.

**11.** (20 נק') נתון משולש ABC שאינו שווה שוקיים. המעגל החוסם שלו יסומן ב-Γ, מרכזו ב-O, ומרכז המעגל החסום ב-I. אמצעי הקשתות AC (ללא B), BC (ללא A) יסומנו ב-Q, P בהתאמה. מרכזי המעגלים החסומים מבחוץ לצלעות BC, AC של המשולש יסומנו $I_a$, $I_b$. האנכים מ-$I_a$, $I_b$ לצלעות AC, BC בהתאמה נפגשים בנקודה G. נקודת חיתוך נוספת של $I_aC$ עם Γ (השונה מ-C) תסומן M. נקודה K נבחרה כך ש-KO מקביל ל-CI, ובנוסף הישר KQ חותך את הצלעות AC ו-BC בנקודות פנימיות, הנמצאות במרחק שווה מ-C. הוכיחו כי הישרים OG, MK, AP נפגשים בנקודה אחת.

**12.** (20 נק') נתבונן בווקטורים שלמים במרחב תלת-ממדי. נגיד ששני ווקטורים הם באותו כיוון אם כל אחד מהם הוא כפולה של השני. ווקטור יקרא פרימיטיבי אם הוא ווקטור הכי קצר בכיוון שלו. ניקח ווקטור פרימיטיבי v ונסמן ב-L את קבוצת כל הווקטורים השלמים שמאונכים לו. נתבונן בכל הזוגות של ווקטורים ב-L שהם לא באותו כיוון וניקח את המקביליות הנוצרות על ידי זוגות אלה. הוכח כי השטח המינימלי מבין שטחי המקביליות שמתקבלות שווה לאורך של v.

**13.** (25 נק') בהינתן $a,b,c,d>0$ , $abcd=1$. הוכיחו $\sum_{cyc}\frac{1}{a^2\left(3b^2c+1\right)}\geq 1$.

**14.** (25 נק') ארבעה ישרים שונים במרחב עוברים דרך אותה נקודה. הזווית בין כל שני ישרים מבין הארבעה היא $\alpha$. מהו הערך של $\alpha$? מצאו את כל התשובות האפשריות.

**15.** (30 נק') נתון גרף בעל 29 קודקודים. גודל תת-הגרף המלא המקסימאלי שלו הוא 15 בדיוק. הוכיחו כי יש קודקוד המשותף לכל תתי-הגרפים המלאים בגודל 15.

*בהצלחה!*