ט''ו בחשוון תשע''ג 31.10.2012
קבוצת ירדן, מחנה סתיו
אין להשתמש במחשבון

1. בכיתה 30 תלמידים. בכל שיעור המורה עושה רשימת נוכחות מדויקת. לאחר 100 שיעורים המורה נותן ציון לכל תלמיד, השווה לכמות השיעורים בהם התלמיד נוכח. ציון עובר הוא כל ציון מעל 55 (לא כולל). בהנחה שבכל שיעור רוב התלמידים הבריזו:
א. הוכח\י שיש תלמיד שנכשל.
ב. מצא\י את המספר הגדול ביותר N , עבורו ניתן להיות בטוח שלפחות N תלמידים נכשלו.

2. CD הוא תיכון של המשולש ABC. המעגלים החסומים במשולשים ACD ו-BCD משיקים לקטע CD בנקודות M ו-N, בהתאמה. מצא את MN אם $AC - BC = 2$.

3. a,b,c הינם מספרים ממשיים שונים מ-0, עבורם מתקיימות המשוואות הבאות:

$$a+b+c=1$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$

האם בהכרח אחד מהם שווה ל-1?

4. עדו משחק במשחק מחשב.7 במשחק יש שורה של 200 כדורים צבעוניים ב-100 צבעים: שני כדורים מכל צבע. בתחילת המשחק, כל שני כדורים מאותו צבע נמצאים במרחק 100 זה מזה (כלומר ביניהם בשורה יש 99 כדורים אחרים בדיוק). בכל מהלך, עדו בוחר זוג כדורים סמוכים והמחשב משנה את הסדר שלהם. אם בשלב מסוים של המשחקי שני כדורים מאותו צבע נצמדים, המחשב מעלים אותם. המשחק מסתיים כאשר כל הכדורים נעלמים. האם עדו יכול לסיים את המשחק תוך 5773 מהלכים בדיוק?

5. מצא\י את 7 הספרות האחרונות (הימניות) של מכפלת כל המספרים הטבעיים האי-זוגיים, אשר קטנים מ-10^7 ולא מסתיימים ב-5.

בהצלחה!

ט''ו בחשוון תשע''ג 31.10.2012

קבוצת רותם, מחנה סתיו

1. לכל משולש יש 3 מעגלים חסומים מבחוץ. למעגלים אלה יש 6 נקודות השקה להמשכי הצלעות. מצא את כל המשולשים, עבורם 6 הנקודות הנ"ל נמצאות על מעגל אחד.

2. עבור $a,b,c>0$, הוכיחו כי $\frac{a^3}{3a^2+bc}+\frac{b^3}{3b^2+ac}+\frac{c^3}{3c^2+ab}\geq\frac{a+b+c}{4}$.

3. סר וגרותנדיק משחקים במשחק הספקטראלי על טבלת מספרים $N\times N$. בתחילתו של תור מספר r, רשומים בטבלה מספרים שלמים אי-שליליים $a^r_{m,n}$ (כאשר $0\leq m<N$ מספר השורה, $0\leq n<N$ מספר העמודה). בתחילת המשחק, המספרים הם $a^0_{m,n}=n+m+1$ לכל $0\leq m,n<N$. סר מתחיל, והשחקנים משחקים בתורות (גם התורות ממוספרים מ-0). בתור ה-r מותר לעשות מספר כלשהו של פעולות מהסוג הבא: אפשר להקטין את $a^r_{m,n}$ ואת $a^r_{m+r,n-r+1}$ באותו מספר טבעי, כל עוד שניהם נשארים אי-שליליים (למשל, בתור האפסי סר יכול לבחור מספר זוגות של משבצות סמוכות אחת מימין לשנייה, ומכל זוג להפחית מספר חיובי שלם כלשהו, לאו דווקא אותו מספר, והזוגות עלולים להיחתך).
המטרה של סר היא שבאיזשהו שלב במשחק, כל המספרים שעל הלוח יהיו שווים ל-0, מלבד אחד שיהיה שווה ל-$N+2$. האם יש לו אסטרטגיה מנצחת, או שגרותנדיק יוכל למנוע זאת?

בהצלחה!

ט''ז בחשוון תשע''ג 1.11.2012

תחרות קבוצתית, מחנה סתיו

9 השאלות הראשונות עולות 10 נקודות כל אחת, 7 השאלות האחרונות עולות 30 נקודות כל אחת.

1. מצא את כמות הדרכים לסדר במעגל את כל המספרים הטבעיים מ-1 ועד 2012, כך שההפרש (בערכו המוחלט) בין סכומי המספרים בכל שני זוגות סמוכים של מספרים סמוכים במעגל הוא לכל היותר 2 (שני זוגות של מספרים סמוכים במעגל נקראים סמוכים, אם הם מכילים בדיוק מספר אחד במשותף; אפשרויות לסידור המתקבלות אחת מהשנייה ע''י סיבוב לא נחשבות לשונות).

2. חשב את ערך הביטוי: $\left(1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+321\cdot 322\right)\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{321\cdot 322\cdot 323}\right)$.

3. יוסי גר בתל אביב ועובד במפעל מסווג בדרום הארץ. אפשר להגיע מתל אביב למפעל באוטובוס או במונית שירות. בשאלה זו נניח, כי לכל אורך הדרך אין פקקים, וגם כי הן האוטובוס והן מונית השירות נוסעים במהירויות קבועות, אך שונות, ללא הפסקה. כל רכב, האוטובוס או מונית השירות, מסתובב ברגע שהוא מגיע לתחנה הסופית (המפעל או תל אביב), ויוצא מידית לדרך בכיוון ההפוך.
ב-8:00 האוטובוס יצא מהמפעל, ומונית השירות יצאה מתל אביב. הם נפגשו בפעם הראשונה במרחק 72 קילומטרים מהמפעל. אחרי שהאוטובוס והמונית הגיעו ליעדם והתחילו לחזור, הם נפגשו שנית, הפעם במרחק 40 קילומטרים מתל אביב.
מהו המרחק מתל אביב למפעל שבו יוסי עובד?

4. ABC משולש, המעגל החסום משיק לצלעותיו בנקודות P, Q, R (כאשר P מול A, Q מול B), אמצעי הקשתות BC, AC, AB של המעגל החוסם יסומנו U, V, W בהתאמה, ומרכזי המעגלים החסומים מבחוץ של ABC יסומנו J, K, L (כאשר J מול A, ו-K מול B).
א. הוכיחו כי PU, QV, RW נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו תסומן X.
ב. הוכיחו כי PJ, QK, RL נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו תסומן Y.
ג. הוכיחו כי UJ, VK, WL נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו תסומן Z.
ד. הוכיחו כי X, Y, Z נמצאים על ישר אחד.

5. נתון פולינום $p(x)$, בעל מקדמים ממשיים, שעבורו לכל x ממשי, מתקיים:
$$3p(x^2) + 2122\cdot x^2 = 2\,(x^2+2)\cdot p(x) + x^4 + 4024\cdot x^3 + 8048\cdot x + 1959$$
מצא את $p(2013)$.

6. על שולחן מלבני ששטחו 2 מ''ר נמצאות הרבה מפיות (חלקן עגולות, חלקן ריבועיות, אבל כל מפית פרוסה ולא מכופלת, ואף מפית לא חורגת מגבולות השולחן). נמלה יכולה לעבור מכל נקודה שמכוסה על ידי מפית לכל נקודה שמכוסה על ידי מפית, בלי לדרוך על השולחן עצמו. יהיו A, B שתי נקודות המכוסות על ידי מפיות. הוכח שניתן להוריד מספר מפיות מהשולחן (ולהשאיר את יתר המפיות במקומן), כך שהנמלה עדיין תוכל לעבור מ-A ל-B בלי לדרוך על השולחן, והשטח הכולל של המפיות שנשארו לא יעלה על 4 מ''ר.

7. בפרלמנט של מדינה מסוימת במזה''ת יש מספר סיעות. סיעה נחשבת לבעלת השפעה במידה ויש בה יותר מ-2% מכלל חברי הפרלמנט. ידוע כי לכל סיעה בעלת השפעה יש 3 סיעות קטנות יותר, אשר יש בהן בסה''כ יותר אנשים מאשר בסיעה זו. מהו המספר המינימאלי האפשרי של סיעות שיכולות להיות בפרלמנט של מדינה זו?

8. לוח 7×7 חולק למלבנים 1×3 וריבועים 2×2. ידוע שסכום אורכי הקטעים שסומנו בתוך הלוח שווה 42. מצא את מספר הריבועים 2×2 והמלבנים 1×3.

9. נתבונן בקבוצה $S=\left\{(a,b,c)\middle| a,b,c\in\mathbb{N},\ \ a\middle|b\middle|c,\ \ 1\le c\le 1000\right\}$. האם $|S|$ מתחלק ב-3?

10. על במת הקרקס העגולה שרדיוסה 10 מטרים, רץ אריה. האריה רץ בקווים ישרים, אבל מדי פעם הוא פונה. הוכח שעל מנת לרוץ 30 קילומטרים, הוא יצטרך לעשות פניות עם סכום זוויות שהוא לפחות 2998 רדיאנים.

11. שני גרפים נקראים תלויים, אם אחד מהם שקול לתת-גרף של גרף אחר. מהי הכמות המרבית של גרפים בלתי תלויים בזוגות, בעלי 5 קודקודים?

12. הוכיחו כי $\sum_{cyc}\frac{a^5}{\sqrt{a^{10}+2a^4c^6+6b^6c^4}}\ge 1$ עבור $a,b,c>0$.

13. א. מהו המספר הגדול ביותר k עבורו ניתן לבחור k ווקטורים ב-$\mathbb{R}^3$ כאלה, שהזווית בין כל שניים מהם כהה?

ב. אותה שאלה עבור $\mathbb{R}^n$ (התשובה תלויה ב-n).

14. מצא את כל הפונקציות $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ המקיימות $f(u+v)-f(u)-f(v)=(u+v)\cdot\sqrt[3]{f(uv)}$.

15. בפירמידה משולשת אורכי הגבהים הם h_1,h_2,h_4,h_4, והמרחקים בין זוגות ישרים של מקצועות מצטלבים הם d_1,d_2,d_3. הוכיחו כי: $\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}=\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_4^2}$.

16. נתון מצולע קמור שאינו משולש. המצולע מחולק למשולשים (מותר לקודקוד של משולש אחד להיות על צלע של משולש אחר). הוכח כי קיים לפחות זוג אחד של משולשי החלוקה שיש להם צלע שלמה משותפת.

בהצלחה!