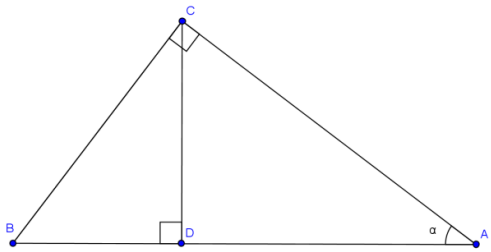
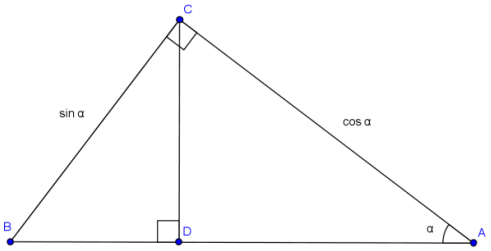
טריגונומטריה

סוגיה 1.

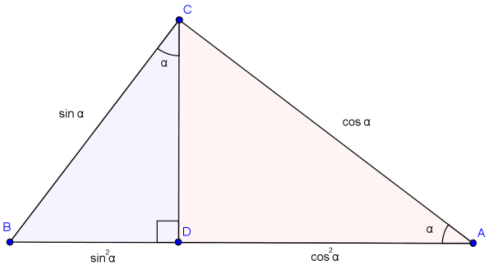


א. במשולש ישר זווית בעל זווית חדה α, ויתר שווה ל-1, מעבירים גובה מהקודקוד של הזווית הישרה. לאיזה קטעים מחולק היתר?

פתרון.



נתבונן במשולש ABC. לפי הגדרה של סינוס וקוסינוס, $BC = \sin\alpha$, $AC = \cos\alpha$.

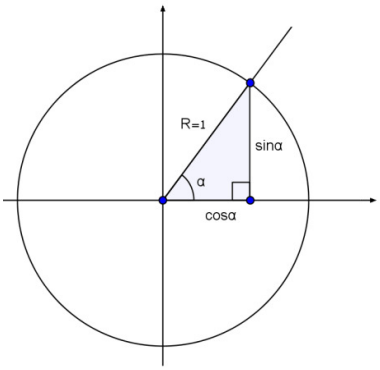


אז נתבונם במשולשים BCD ו-ACD. כל אחד מהם דומה למשולש המקורי, והקטעים AC ו-BC שחישבנו לעיל הינם יתרים. לכן $BD = \sin^2\alpha$, $DA = \cos^2\alpha$.

מסקנה מעניינת.

הקטע AB שאורכו 1 מחולק לקטעים באורכים $\sin^2\alpha$ ו-$\cos^2\alpha$, כלומר,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

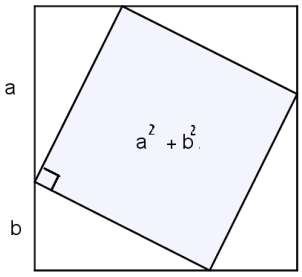


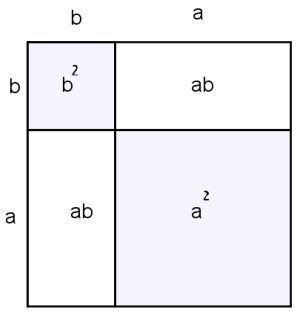
הוכחה נוספת של העובדה.

העובדה נובעת במיידיות ממשפט פיתגורס* ונגדרות.

*הוכחה של משפט פיתגורס.

בשני הציורים הנתונים השטח הכחול אותו דבר. לכן אורך הצלע של הריבע בכחול בציור השני שווה ל-$\sqrt{a^2+b^2}$. מש"ל.

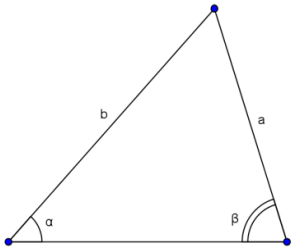




טריגונומטריה

ב. נתון משולש עם זוויות α ו-β, ורדיוס של המעגל החוסם שווה ל-R. לאיזה קטעים הגובה CD מחלק את הצלע AB?

טענת עזר – משפט סינוסים

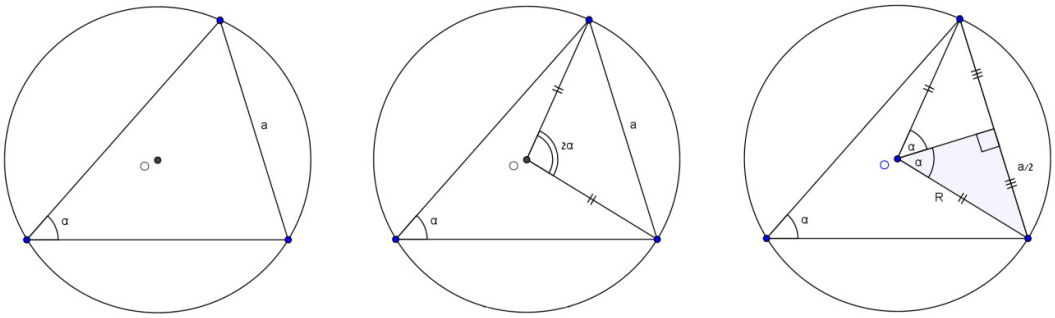


במשולש המתואר בציור $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$.

הערה.

כמובן, השוויון יתקיים לכל שלושת הצלעות במשולש. יתר על כך, אפשר גם להגיד, למה היחס בין צלע לסינוס של הזווית ממול שווה. הוא תמיד שווה ל-$2R$, כאשר R הינו רדיוס המעגל החוסם של המשולש. נוכיח ללא הגבלת הכלליות כי $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$, והשוויון הרצוי נובע מזה במיידיות.

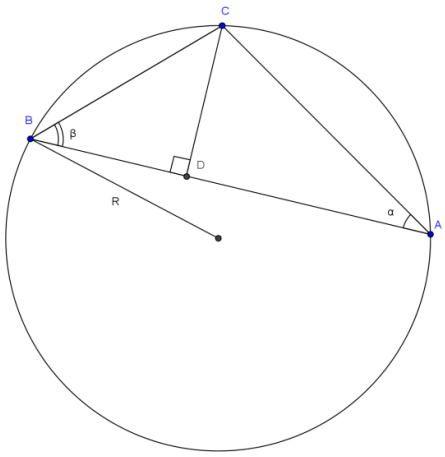
הוכחה של משפט סינוסים.

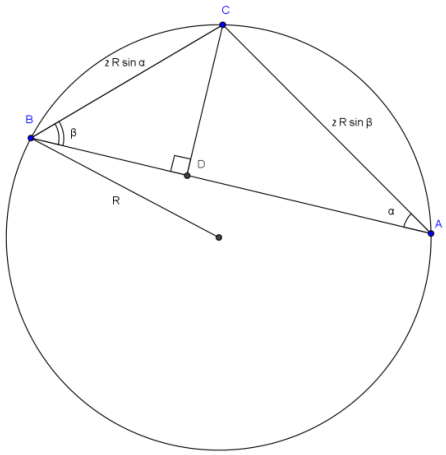


נתבונן במעגל החוסם של המשולש. נעביר רדיוסים לקצוות של צלע a. נשים לב כי זווית ביניהם תהיה שווה ל-2α. נעביר אנך ממרכז המעגל לצלע a. נשים לב כי הוא יחצה את הזווית 2α וגם יחלק את הצלע a לשני חלקים שווים. נתבונן באחד משני משולשים ישרי זוויות שהתקבלו. לפי הגדרה של סינוס, $\sin\alpha=\frac{a/2}{R}=\frac{a}{2R}$. מש"ל.

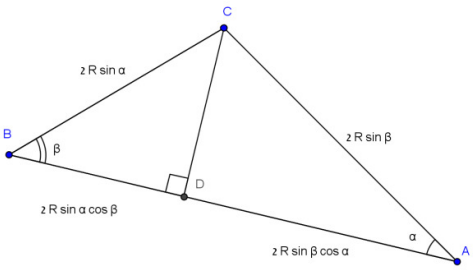
טריגונומטריה

פתרון.





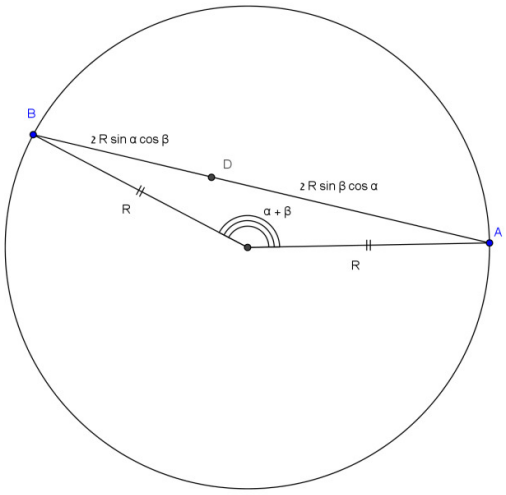
לפי משפט סינוסים, $BC = 2R\sin\alpha$,
$AC = 2\sin\beta$.



ואז, לפי הגדרה של סינוס, $BD = 2R\sin\alpha\cos\beta$
ו- $AD = 2R\sin\beta\cos\alpha$.

מסקנה מעניינת.

נשים לב כי הקטע AB שאורכו $2R\sin(\alpha+\beta)$ מחולק לקטעים שאורכם
$2R\sin\alpha\cos\beta$ ו- $2R\sin\beta\cos\alpha$.



מכאן $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

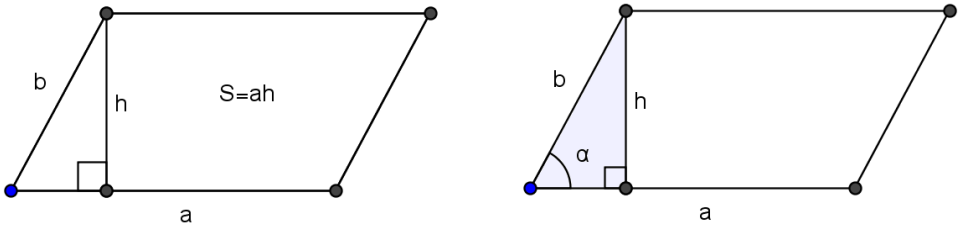
טריגונומטריה

ג. נתונים 4 משולשים ישרי זווית. אורך היתר של כולם 1, לשניים מהם יש זווית α, ולשניים יש זווית β. מכניסים אותם לקופסה מלבנית ברוחב $\cos\alpha+\cos\beta$ וגובה $\sin\alpha+\sin\beta$, בשתי שיטות, כמו בשני הציורים. חשב\י את השטח של הקופסא שלא מכוסה על ידי המשולשים בשני המקרים, והסק\י מכאן הכללה של משפט פיתגורס (משפט פיתגורס מתקבל כאשר $\beta=90^\circ-\alpha$).

טענה.

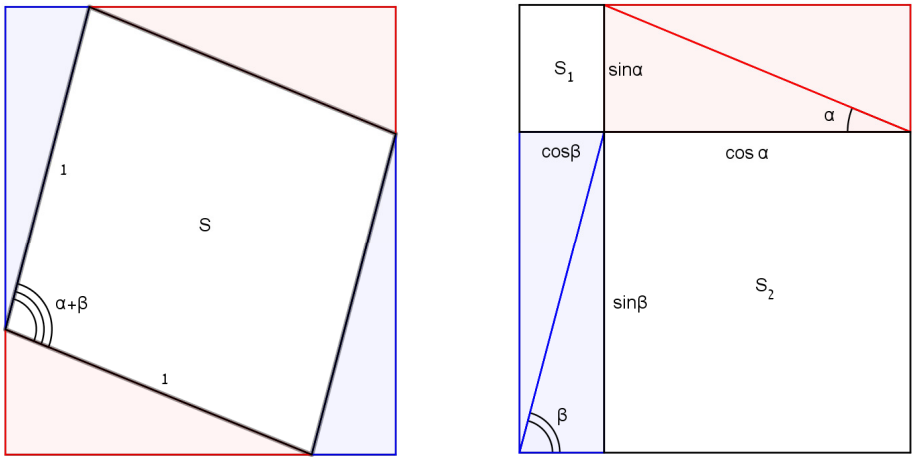
שטחה של מקבילית עם צלעות a ו-b וזווית α שווה ל-$a\cdot b\cdot\sin\alpha$.

הוכחת הטענה.



לפי הגדרה של סינוס, $h=b\sin\alpha$, לכן $S=ah=ab\sin\alpha$.

פתרון.



מצד אחד, $S=1\cdot1\cdot\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$. מצד שני,
$S=S_1+S_2=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$.

כמסקנה, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$. (קיבלנו היכחה נוספת לנוסחא)

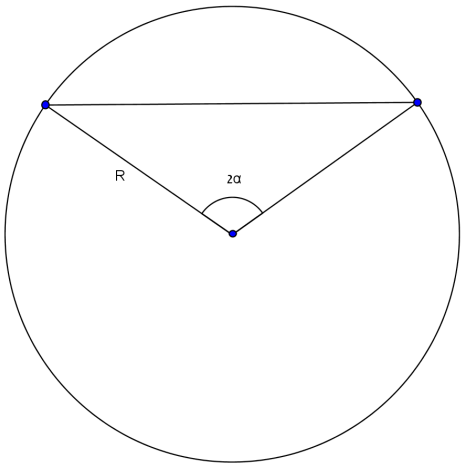
הערה: אם ניקח $\beta=90^\circ-\alpha$, נקבל הוכחה של משפט פיתגורס.

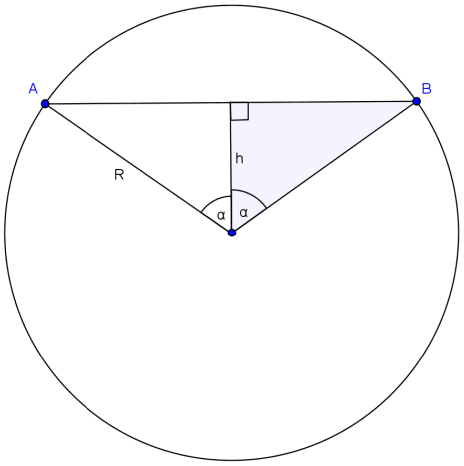
טריגונומטריה

סוגיה 2.

א. נתון משולש שווה שוקיים: שתי צלעותיו שוות R וזווית בינם 2α. מה שטחו?

פתרון.





$S = AB \cdot h$. מתקיים: $AB = 2R\sin\alpha,\ h = R\cos\alpha$. לכן $S = R^2 \sin\alpha\cos\alpha$.

מסקנה מעניינת:

בנוסף, ידוע כי $S = \dfrac{R^2 \sin 2\alpha}{2}$ (מוכיחים את זה על ידי העברת גובה ושימוש בנוסחא "גובה כפול בסיס"). כך קיבלנו נוסחא עבור סינוס של 2α:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

ב. הוכח\י כי שטח של משולש שווה ל- $\dfrac{abc}{4R}$.

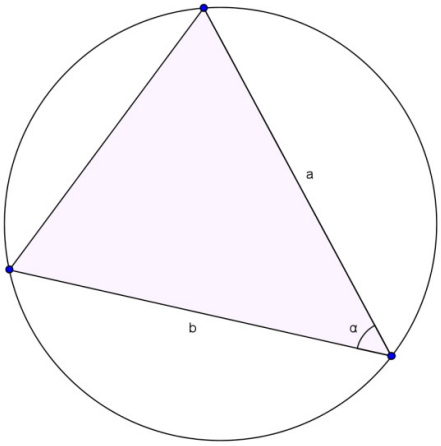
פתרון.

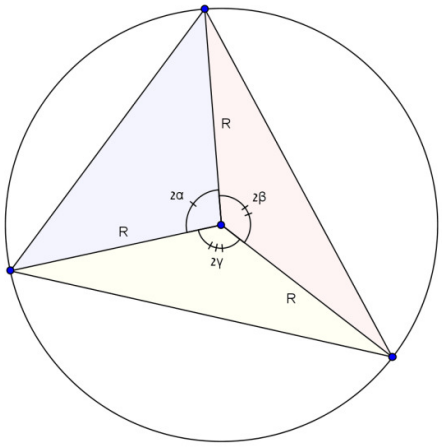
ידוע כי $S = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$. בנוסף, $c = 2R\sin\gamma$, כלומר $\sin\gamma = \dfrac{c}{2R}$. נציב את לשוויון הראשון ונקבל מש"ל.

טריגונומטריה

ג. הוכח\י כי $2\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta + 2\sin 2\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$.

פתרון.





נחשב שטחו של משולש בעל זוויות α, β ו-γ ורדיוס המעגל החסום שווה ל-1. מצד אחד, הוא שווה ל-$\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{4}$. מצד שני, הוא שווה לסכום שטחי שלושת המשולשים הקטנים (ראה ציור), כלומר $\frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 2\beta}{2} + \frac{\sin 2\gamma}{2}$. נכפיל הכל ב-4 ונקבל מש"ל.

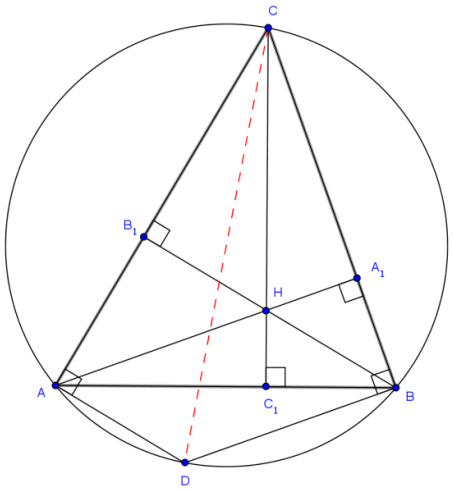
טריגונומטריה

סוגיה 3.

במשולש ABC הגבהים AA_1, BB_1, CC_1 נפגשים בנקודה H.

א. הוכיחו כי מעגלים חוסמים של ABC, ABH, ACH, BCH הם באותו גודל.

פתרון.

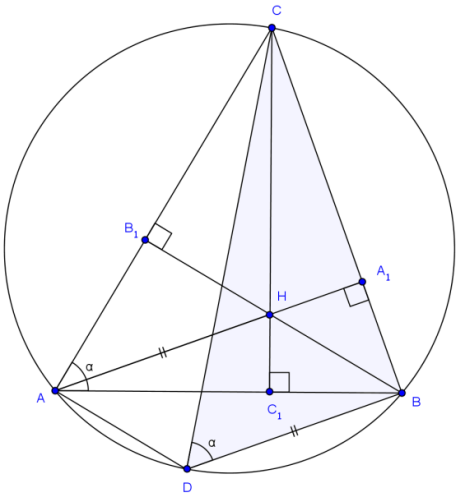


נשלים את המשולש AHB למקבילית $AHBD$. נשים לב כי $AD \perp AC$ ו- $BD \perp BC$, כלומר המרובע $ACBD$ הינו חסום. במילים אחרות, המעגל החוסם של המשולש ABD מתלכד עם המעגל החוסם של המשולש ABC, בפרט, יש להם אותו רדיוס של מעגל חוסם. ובגלל שמשולשים ABD ו- ABH חופפים, אז רדיוס המעגל החוסם של ΔABH שווה לזה של ΔABC.

באופן זהה מוכיחים את זה עבור שני המשולשים האחרים.

ב. חשבו את באמצעות α, β, γ, R את אורכי הקטעים AH, BH, CH.

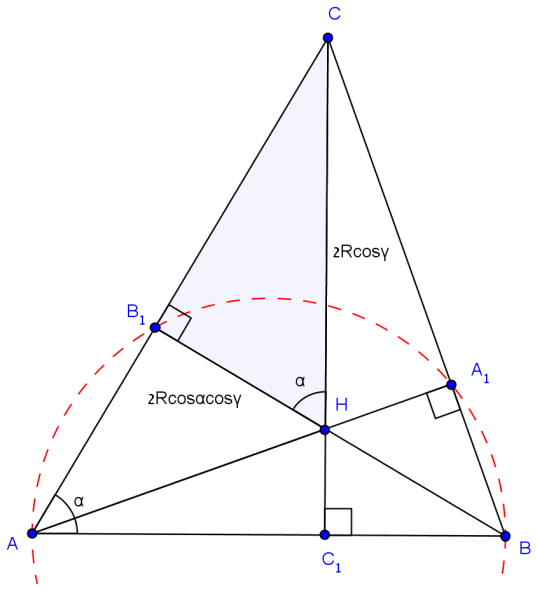
פתרון.



ללא הגבלת הכלליות, נחשב את AH. נשים לב כי $AH = DB$, לכן מספיק לחשב את BD. נתבונן במשולש ישר זווית BCD. בגלל ש- CD קוטר ו- $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$, $BD = 2R\cos\alpha$.

טריגונומטריה

ג. חשבו את $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ R$ באמצעות אורכי הקטעים $A_1H,\ B_1H,\ C_1H$.



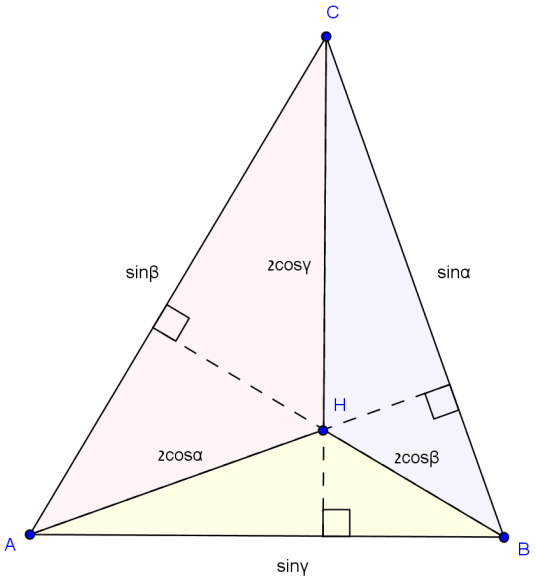
פתרון.

במשולש B_1CH $\angle B_1HC=\alpha$ (חשבון זוויות) וידוע כי $CH=2R\cos\gamma$. לכן $B_1H=2R\cos\alpha\cos\gamma$.

הערה:

אנחנו יכולים לבדוק את עצמינו בשני סעיפים האחרונים באופן הבא. נעביר מעגל דרך הנקודות $A,\ B,\ A_1$ ו-B_1. חייב להתקיים: $B_1H\cdot HB=AH\cdot HA_1$. הבדיקה מראה שזה אכן מתקיים.

ד. $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$.



פתרון

ניזכר כי $S=\frac{abc}{4R}$. לשם נוחות נניח $R=1$. אז מצד אחד, השטח שווה $2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

מצד שני, הוא שווה לסכום השטחים של שלושת המשולשים הקטנים, והם שווים

$$2\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$2\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma$$
$$2\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta$$

אם נשווה את שני הביטויים שקיבלנו לשטח המשולש הגדול ונחלק ב- $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, נקבל מש"ל.

טריגונומטריה

סוגיה 4*.

א. נתון מרובע קמור שצלעותיו (לפי הסדר) הן a, b, c, d ואלכסוניו הם m, n, ושתי זוויות נגדיות שלו הן α,γ. הוכח כי $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma)$.

ב. הוכח כי אם $p = \frac{a+b+c+d}{2}$, אז

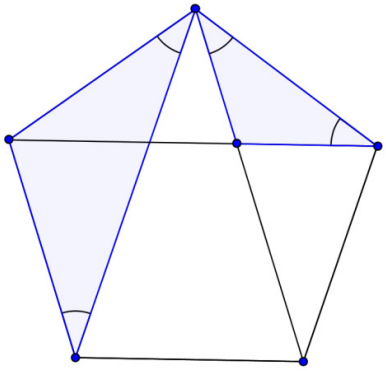
$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) + abcd\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}$$

ג. במרובע נתונים הזווית בין האלכסונים $\phi \neq 90^\circ$ ואורכי הצלעות a,b,c,d בסדר זה. מצאו נוסחה לשטח המרובע באמצעות a,b,c,d,ϕ.

תשובה. $\frac{\tan\phi}{2}\cdot\left|d^2 - c^2 + b^2 - a^2\right|$.

טריגונומטריה

סוגיה 5. בציור מחומש משוכלל.



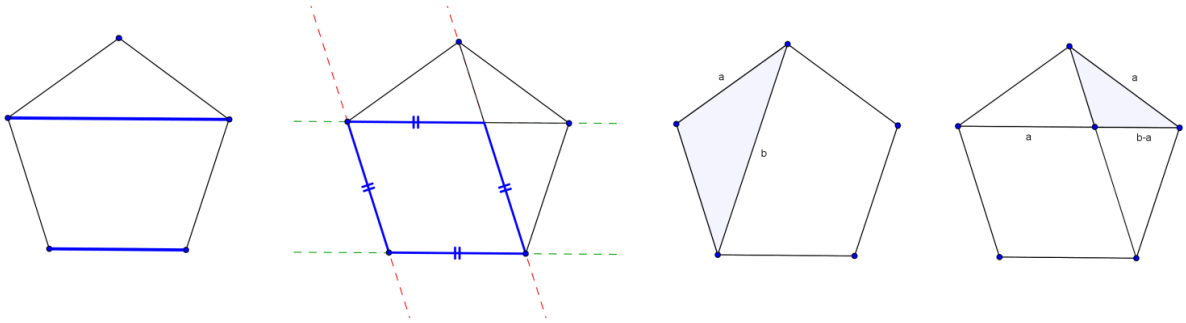
א. הוכיחו את דמיון המשולשים בציור.

פתרון.

ארבעת הזוויות המסומנות שוות משיקולי סימטריה (במשולש משוכלל זווית בין צלע לאלכסון תמיד תהיה אותו דבר). מכאן – המשולשים דומים, כי יש להם אותם זוויות.

ב. חשב\י את היחס בין אלכסון לצלע של מחומש.

פתרון



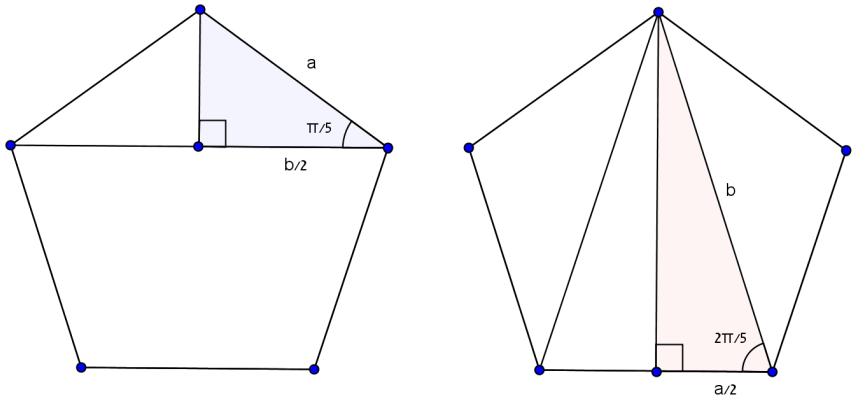
מדמיון של שני המשולשים הכחולים נובע $\frac{b}{a}=\frac{a}{b-a}$. נסמן $x=\frac{b}{a}$. אזי $x=\frac{1}{x}+1$,

כלומר $x^2=x+1$. לכן $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (חתך הזהב).

טריגונומטריה

ג. הוכח\י כי $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

פתרון.



נתבונן במשולש הכחול. זה משולש ישר זווית, ויש לו זווית של $\frac{\pi}{5}$. לכן

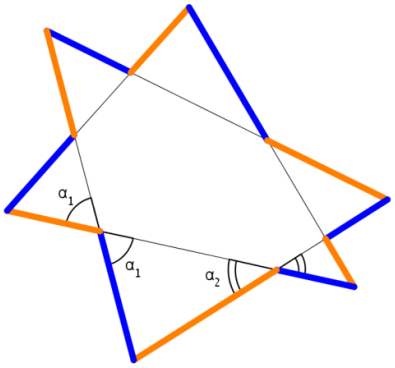
$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{b/2}{a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

נתבונן במשולש האדום. זה משולש ישר זווית, ויש לו זווית של $\frac{2\pi}{5}$. לכן

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{a/2}{b}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{\sqrt{5-1}}{4}.$$

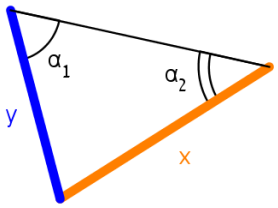
טריגונומטריה

סוגיה 6. הוכיחו כי מכפלת הקטעים הכחולים שווה למכפלת הקטעים הכתומים.



פתרון.

כתוצאה של חיתוך בין המשולשים נוצרים שישה "אוזניים" בצורת משולש. נתבונן באוזניים האלה. נשים לב כי יש שם הרבה זוגות של זוויות קודקודיות (ראה ציור), נסמן אותם $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_6$.
עכשיו נרשום את משפט הסינוס עבור כל אחד מהאוזניים:



$$\frac{x}{\sin\alpha_1}=\frac{y}{\sin\alpha_2}$$

...

ואם נכפיל את כל הביטויים שהתקבלו, אחרי צמצום איברים דומים נקבל מש"ל.

סוגיה 7.

מצא ביטוי קצר לביטוי אינסופים

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\ldots}}}}}}}}}}}}.$$