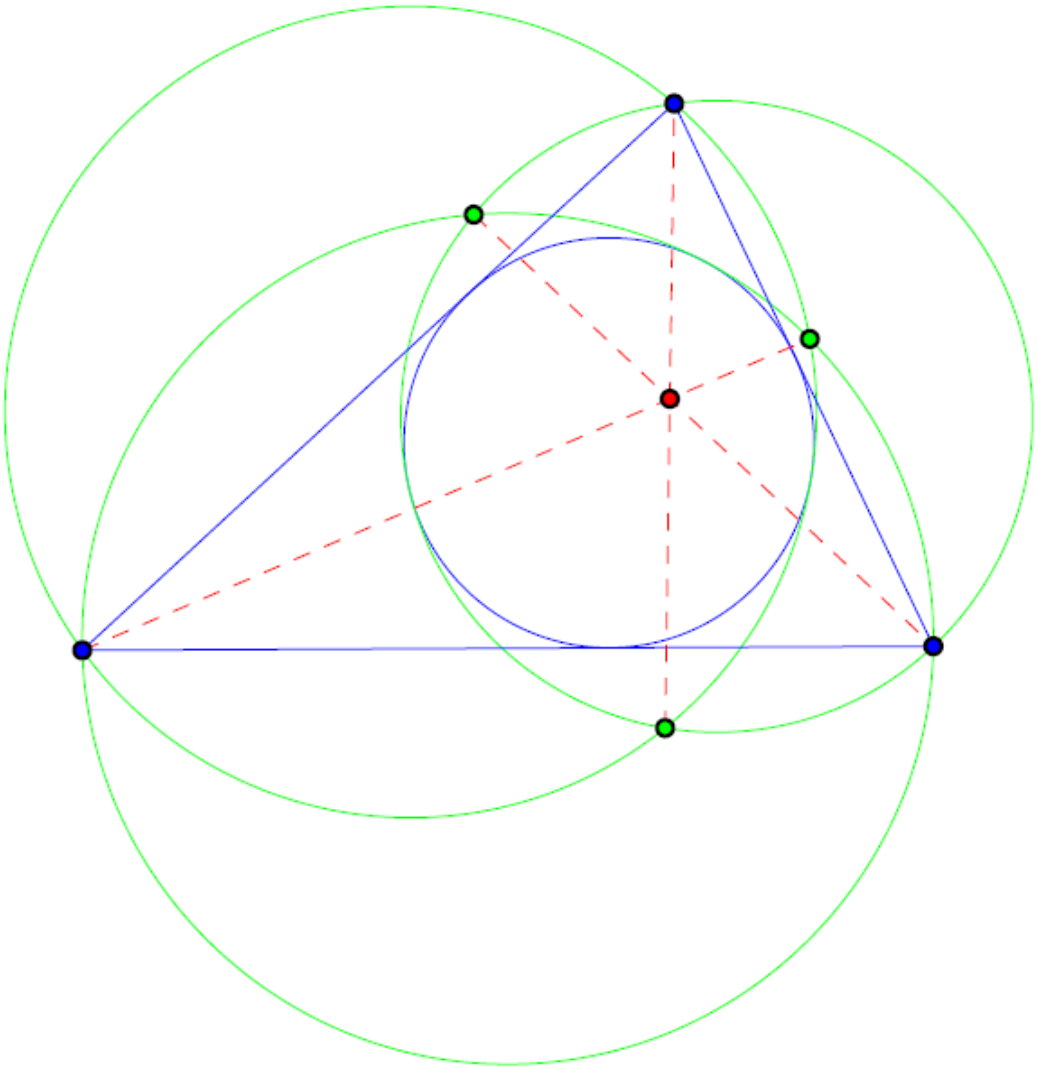
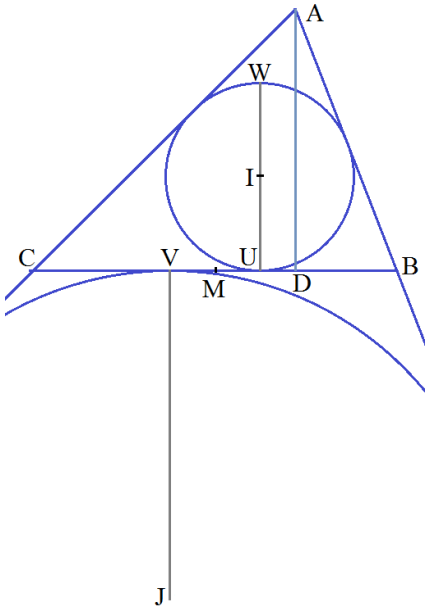
התוכנית היא לפתור את השאלה של פיודור איבלב:



במשולש ABC, המעגל החסום הוא ω ומרכזו I; מרכז המעגל החוסם O. מעבירים מעגלים (ירוקים בציור) $\omega_a,\omega_b,\omega_c$, שכל אחד מהם עובר דרך שני קודקודים ומשיק למעגל ω. הוכח כי שלושת מיתרים משותפים של זוגות מעגלים מבין $\omega_a,\omega_b,\omega_c$, וגם הישר OI, נפגשים. (לשם קיצור, אנחנו נגיד מספר פעמים שמספר קווים נפגשים, כאשר הכוונה היא שהם נפגשים בנקודה אחת).

שאלה זו הופיע בתחרות Romanian Master of Mathematics and Sciences. אנחנו נעבור על פתרון בשלבים, כאשר לכל שלב יש הוכחה גיאומטרית פשוטה יחסית.

סוגיה ראשונה: תכונות בסיסיות של מעגלים חסומים



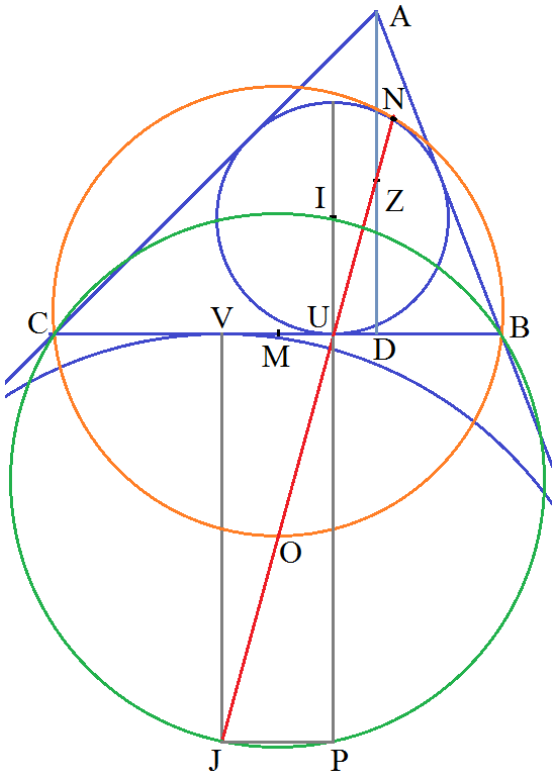
במשולש ABC מעגל חסום שמרכזו I משיק לצלע BC בנקודה U, ומעגל חסום מבחוץ לצלע BC שמרכזו J משיק לצלע BC בנקודה V. בנוסף, נניח כי M הוא אמצע BC, AD הוא גובה, ו-UW הוא קוטר של המעגל החסום.

1. הוכח כי AWV ישר .

2. תהי X היא נקודת חיתוך של MI ו-AD.
הוכח כי AX שווה לרדיוס המעגל החסום.

3. הוכח כי JU, IV נפגשים באמצע של AD.

סוגיה שנייה: שאלה מ-2002 Shortlist



בסימונים של הסוגיה הקודמת, תהי Z אמצה הגובה AD. יהי הישר UZ חותך את המעגל החסום שנית בנקודה N (בנוסף ל-U).
VUPJ מלבן, שמרכזו O.

המטרה של סוגיה זאת היא להבין, שהמעגל BNC משיק למעגל החסום.

4. הוכח כי $BU \cdot UC = IU \cdot UP$.

5. הוכח כי $IU \cdot UP = OU \cdot UN$.

6. הוכח כי O נמצאת על מעגל BCN (וחוצה את הקשת BC).

7. הוכח כי N היא נקודת השקה של המעגל החסום והמעגל NBC.

סוגיה שלישית: פתרון השאלה המקורית

נשתמש בסימונים השונים מהסוגיות הקודמות. ABC עדיין משולש, I, O מרכזי המעגל החסום והחוסם, מעגלים $\omega_a,\omega_b,\omega_c$ משיקים למעגל החסום וכל אחד מהם עובר דרך שני הקצוות של צלע מתאימה. מעגלים ω_b,ω_c נחתכים בשתי נקודות: A, 'A. המתרה היא להוכיח כי IO , CC' , BB' , AA' נפגשים.

נסמן את נקודות השקה המתאימות של $\omega_a,\omega_b,\omega_c$ עם המעגל החסום ב-A",B",C". נסמן ב-T_a,T_b,T_c את נקודות ההשקה של המעגל החסום עם הצלעות. נסמן ב-P_a את אמצע הקשת BC של מעגל ω_a (כמו נקודה O של הסוגיה השנייה), ובאופן דומה נגדיר P_a,P_b. נסמן גם ב-I_a,I_b,I_c את מרכזי המעגלים החסומים מבחוץ.

8. הוכח כי $A",T_a,P_a,I_a$, ואמצע הגובה מ-A על ישר אחד.

ישר זה יסומן ℓ_a, ובאופן דומה מוגדרים ℓ_b,ℓ_c.

9. הוכח כי הישרים $P_aP_bP_c$, $T_aT_bT_c$ הומותטיים.

10. הוכח כי $A"T_a,B"T_b,C"T_c$ נפגשים.

11. הוכח כי O הוא מרכז המעגל החוסם של $P_aP_bP_c$.

12. הוכח כי הישרים IO,ℓ_a,ℓ_b,ℓ_c נפגשים.

13. הוכח כי $A"T_a,B"T_b,CC'$ נפגשים.

14. הוכח את הטענה שנוסחה בתחילת התרגיל.