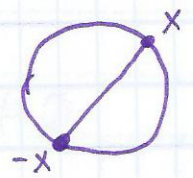
ברוב, בצל, אוטון
25.06.2013

סיכומים

ב'אומטריה של עקומות אלגבריות
במישור פרויקטיבי ממשי.

$ax+by+c=0$	אפיני.	קו ישר
$ax_0+by_1+cx_2=0$	פרוייקטיבי.	

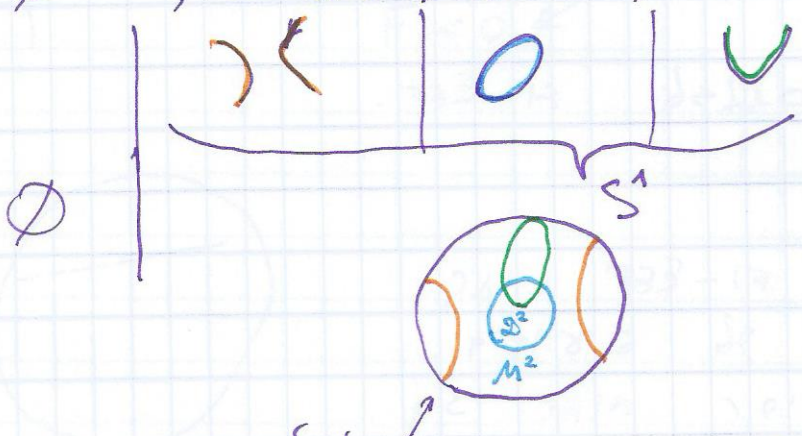
$\mathbb{RP}^2$		$\mathbb{RP}^2 \setminus L \simeq \mathbb{R}^2 \simeq D^2$
		עיגול פתוח



קוניקות



אפיני: פרבולה, אליפסה, היפרבולה,



סגלגל

$\mathbb{RP}^2 = M^2 \cup_{\text{מובוס}} D^2$

יש ספר של Arnold, Real algebraic geometry.
מסתבר שמובוס לא יצא, אבל מוציאים כיסוי
מישור פרוייקטיבי, שאחרי טבעת מובוס
(זה תוקשורה של בליקס קלין).

$\mathbb{RP}^2 \subset$ עקומה אלגברית (ממשית) תהי
ממעלה d.

(1) אם $d=2k$ אזי עקומה C יכולה להיות כזו
$$x_0^{2k} + x_1^{2k} + x_2^{2k} = 0$$

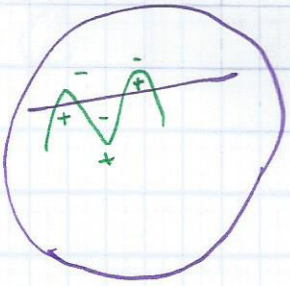
(2) עקומה ממעלה אי-זוגית $d=2k+1$ נמצא לפחות כזו.
$$L \cap C \neq 0$$
קו ישר

משפט (1) $d=2k$, $C \neq \emptyset$, אזי C - אי-זוגי סגלגלים.

(2) $d=2k+1$, $(C \neq \emptyset$ נמצא), אזי C - אי-זוג סגלגלים
ורצה תמ-333. ~~[illegible]~~

הוכחה $F_{2k}(x_0,x_1,x_2)=0$
$F>0 \leftarrow 0<F$
$F<0 \leftarrow 0>F$
$+/-$

לכן כל סגלגל בו-333.



$d=2k+1$
כל סגלגל בו-333 נחתך
מספר זוגי של פעמים.
לכן כל ישר חוצה בק
~~[illegible]~~ בכיוב תמ-333.

יש רק כיוב תמ-333 כזה, כך שכל שלושה
נחתכים (בשלש משפט צ'רדון).

מהו מספר מקסימלי של סגלגלים עבור
עקומות ממעלה d?

משפט Harnack (1876)

מספר רכיבי קשירות של C_d

$$1 \le \ell \le \ell_{max}(d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$$

לכל $d \ge 1$ קיים עקומה C_d בעלת $\ell_{max}(d)$ רכיבי קשירות.

$$\emptyset = C_d^1 \qquad C_{d=2k}^M$$

$$\lambda F_d^{\emptyset} + (1-\lambda) F_d^M \quad \lambda$$

משפט Bezout

C_n, C_m עקומות אלגבריות מדרגות n, m שאינן בעלות רכיב משותף

אז: $\#(C_n \cap C_m) = nm$ ב $\mathbb{CP}^2$

צ"ל: $\#(C_n \cap C_m) \ge nm$ ב $\mathbb{RP}^2$.

מרחב עקומות מעל d מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ הוא $\mathbb{P}^N$

מרחב פולינומים הומוגניים ב-3 משתנים מעל d

$$N = \frac{(3+d)d}{2}$$

(כי מספר מקדמים $\binom{2+d}{2}$)

נשאר: לעבור בנקודה נתונה $\sum_{i+j+k=d} a_{ijk} x_0^i x_1^j x_2^k$

מערכת משוואות לינארית הומוגנית ב- $\binom{2+d}{2}$ משתנים.

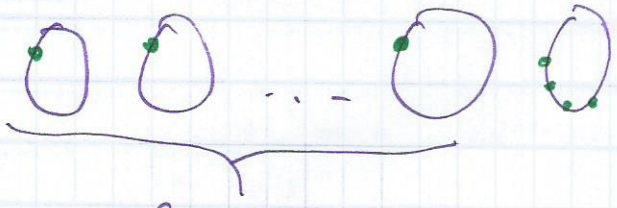
$\Leftarrow$ קיים פתרון $\neq 0$ אם $s < \binom{2+d}{2}$

$\Leftrightarrow$ קיים עקומה מעלה d העוברת דרך s נקודות נתונות.

הוכחת משפט Harnack

בהוכחה נבנה לעקומות מדרגה גדולה.
עקומות מדרגה אי-גדולה נקרא אולי דקרי.
(ר' רשימות - לפחות).

(1) טענה: אם $d=2k$ אז
טענה כי קיימת עקומה C_d חלקה
מאחיות בסך הכל לפחות $2+\frac{(2-d)(1-d)}{2}$ סקלטים.



טענה: $s=\frac{(d+1)(2-d)}{2}$
$=\binom{d}{2}-1=$

דרך s נקודות אולי
טענה: עקומה
מאחיות $2+d$.

$$1-\frac{d}{2}-\frac{d^2}{2}>2+\frac{d^3}{2}-\frac{d^2}{2}=1+\frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

$$d\geq 3$$

הוכחה: לפחות דרך נקודות כלשהן

$$\#(C_d\cap C_{d-2})\leq (2-d)\cdot d \leq$$

$$=(s-\ell_{max}(d))+2\ell_{max}(d) \geq$$

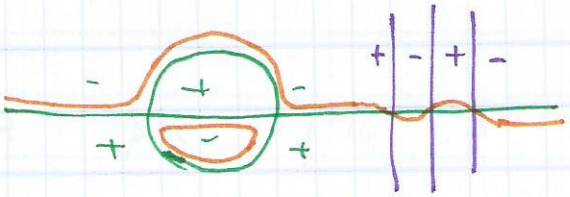
$$=\ell_{max}(d)+s=d^2-2d+1$$

סוף הוכחה

(2) בניית שקיונוב Harnack

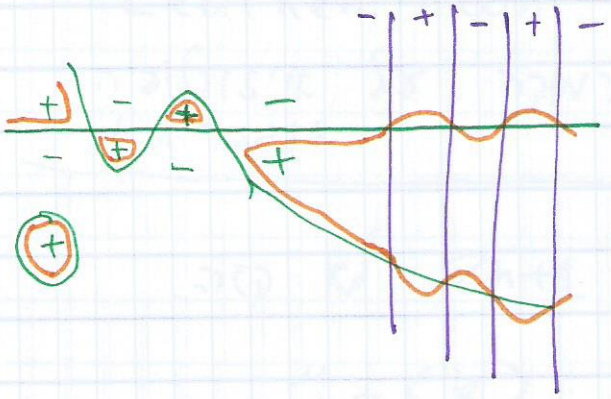
d	1	2	3	4	5	6	7
ℓ_{max}	1	1	2	4	7	11	16

$d=3$



$$F_3 + \varepsilon L_1 L_2 L_3$$

$d=4$

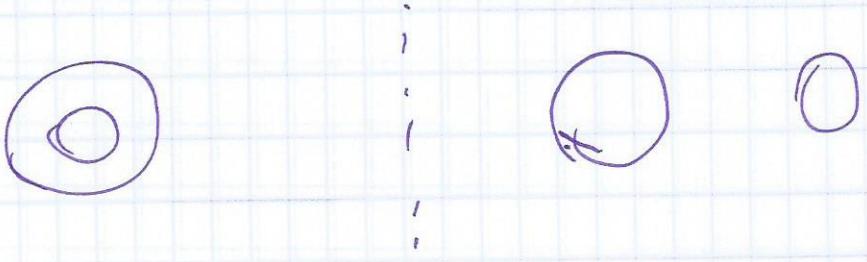


$$F_4 + \varepsilon L_1 L_2 L_3 L_4$$

מכיוון: d מספיק גדול

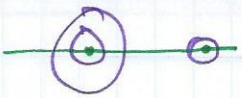
$d = 5, 6, \ldots$

מי/מה נמצא מימין? איפה מיקום יחסי?



$d=1,2,3$ אין שדה

$d=4$ $\{$ ○ ○ ○ ○ בנינו $\langle 4\rangle$



יום י' ⊙ אבל אין יותר דבר נוסף.

אין אלה: $\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle, \langle 4\rangle$

$1\langle 1\rangle$

Zeuthen, Klein (מיון בין־סוגים)

(יש בהם חלוקה יותר עמוקה על בין־סוגים אלגברית)

מעבר מ- $2h$ ל- $2h+1$ לא קשה.

$d=5$ $\quad y+\langle k\rangle \quad 0\le k\le 6$

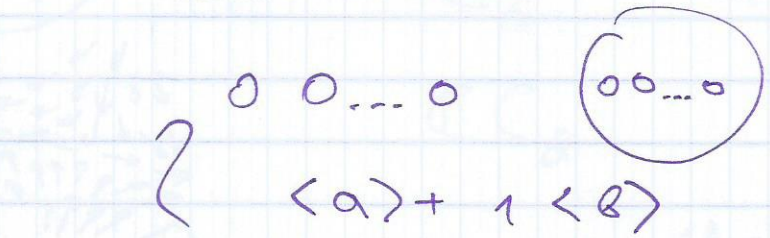
$y+1\langle 1\rangle$

עד כאן היה יחוד באחוז 19.

ב-6 יש בעיה

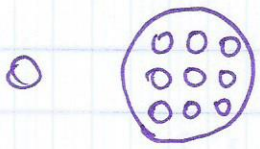
$1\langle 1\langle 1\rangle\rangle$ $d=6$





$a+b=10$ (מקרה מקסימלי, בגלל שוויון Harnack).

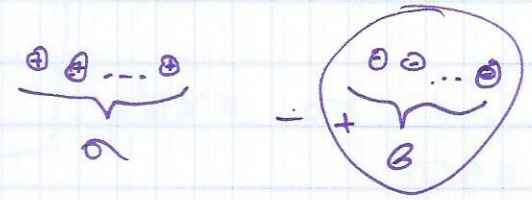

$\langle 9\rangle + 1\langle 1\rangle$ Harnack


$\langle 1\rangle + 1\langle 9\rangle$

1969 Gudkov הוכיח שאי אפשר להגיע ל-16 עבור 6.

יש עוד עוד מקסימלי $\langle 5\rangle + 1\langle 5\rangle$
(וזה טכנולוגיה על כל המקרים, פשוט רק מקסימלי).

הפירוק של Gudkov
עבור כל $d=2k$, $M \cdot C_d$



$$p - n = k^2 \mod 8$$

$p-n=k^2 \mod 4$	Arnold	1971
$p-n=k^2 \mod 8$	Rokhlin	1972



הגדרה $\chi(D) = \#V - \#E + \#F$

$d = 2k$ $\quad C_d$

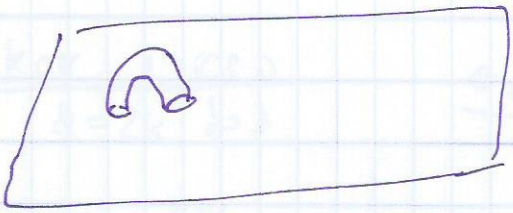
$C_d \subset \mathbb{R}^d$

$$g = \frac{(2-d)(1-d)}{2}$$



לכן יכול להיות שהשטחים יהיו קטנים
אך מספר הידיות לא קטן מהמקרים.
כלומר - קובייה ב 3-ממד מתוך $g+1$ טבעתיים
שיהיו אותו מספר ידיות כמו כדור.

$$C_+ \cup C_- = C_d$$



נסביר C_+ עם שוליים
ונקפל סביבה.

ואז C_-

$$C_+ + \sum_{i=1}^{\ell_{max}} \varepsilon_i D_i \qquad C_- - \sum_{i=1}^{\ell_{max}} \varepsilon_i D_i$$

$$M_+ \cup M_- = \mathbb{C}C_d = 2k\,\mathbb{C}L$$

$$M_+ \text{ "}=\text{" } M_- \text{ "}=\text{" } k\,\mathbb{C}L$$

$$\overset{?}{\#}(M_+ \cap M_-) = k^2$$



$p + \varepsilon i \bar{v}$

$$\left|\begin{pmatrix} (1,0,0,0) \\ (0,0,1,0) \\ (1,\varepsilon,0,0) \\ (0,0,1,\varepsilon) \end{pmatrix}\right| = -1$$

$\bar{v} = (x,0,y,0)$

$i\bar{v} = (0,x,0,y)$

$\in \mathbb{C}^3 \setminus \mathbb{R}$

$$k^2 = \ell_{max} + 2(\Pi^- - \Pi^+)$$

$\ell_{max} = p+n$

$\Pi^- - \Pi^+ \equiv -2n \pmod 4$



