ציר רדיקאלי – תרגול

חלק א' – תכונות של צירים רדיקאליים

<u>תזכורת</u>: המקום הגיאומטרי של נקודות שדרגתן ביחס לשני מעגלים נתונים שאינם קונצנטריים שווה הוא ישר המאונך לקטע המרכזים שלהם, הנקרא ***<u>ציר רדיקאלי</u>***. הצירים הרדיקאליים של כל שניים מבין שלושה מעגלים נתונים נפגשים בנקודה אחת (במובן הפרויקטיבי), או מתלכדים.

1. נתונים שלושה ישרים, שכל שניים מהם נחתכים. על כל אחד מהם סימנו זוג נקודות, כך שכל שני זוגות נמצאים על מעגל. הוכח כי שלושת הישרים עוברים דרך נקודה אחת, או כל שש הנקודות נמצאות על מעגל אחד.

2. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי מעגלים המאונכים לשני מעגלים נתונים. ומה לגבי שלושה מעגלים נתונים?

3. עבור שני (שלושה) מעגלים נחתכים נתונים, מצא את המקום הגיאומטרי של נקודות במישור, שכל אחת מהן מהווה מרכז מעגל שהמיתר המשותף שלו עם כל אחד משני המעגלים הנתונים הנ"ל הוא קוטר במעגל זה.

4. במשולש, המשיכו כל אחת מצלעותיו של המשולש האורתי שלו עד לחיתוך עם הצלע הנגדית של המשולש המקורי. הוכח כי שלושת הנקודות שהתקבלו נמצאות על ישר אחד (הציר האורתוצנטרי), המאונך לישר של אוילר.

5. (דן כרמון) נתונים שלושה מעגלים α,β,γ. הוכח כי קיומם של כל שניים מהבאים גורר את קיומו של השלישי:
   א. הציר הרדיקאלי של α ו-β מכיל את המרכז של γ.
   ב. הציר הרדיקאלי של β ו-γ מכיל את המרכז של α.
   ג. הציר הרדיקאלי של γ ו-α מכיל את המרכז של β.

6. כעת, נתבונן באוסף מעגלים, אשר הציר הרדיקאלי של כל שניים מהם הוא ציר ה-y. מרכזי המעגלים נמצאים כולם על ישר אחד (המאונך לציר הרדיקאלי המשותף), ב.ה.כ. על ציר ה-x, והחזקה של הראשית ביחס לכל אחד מהמעגלים היא p (האוסף מכיל את כל המעגלים מסוג זה).

א. במקרה ש: $p = c^2 > 0$, הוכח כי כל נקודה על ציר ה-x שמרחקה מהראשית הוא לפחות c היא מרכז של בדיוק מעגל אחד מהאוסף, ושני המעגלים המנוונים היחידים באוסף הם הנקודות $(c,0)$, $(-c,0)$. כמו כן, כל המעגלים באוסף מאונכים למעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו c.

ב. במקרה ש: $p=0$, הוכח כי האוסף מורכב מכל המעגלים אשר משיקים לציר ה-y בראשית.

ג. במקרה ש: $p = -c^2 < 0$, הוכח כי האוסף מורכב מכל המעגלים העוברים דרך שתי הנקודות $(0, c)$, $(0, -c)$.

ד. הוכח כי עבור אוסף מסוג א', כל המעגלים המאונכים לשני מעגלים כלשהם מהאוסף, מאונכים למעשה לכל מעגלי האוסף, עוברים דרך שתי הנקודות $(c,0)$, $(-c,0)$ והמרכז של כל אחד מהם הינו על הציר הרדיקאלי המשותף למעגלי האוסף. כמו כן, כל מעגל העובר דרך שתי הנקודות הנ"ל מאונך לכל מעגלי האוסף.

7. הוכח כי עבור אוסף מסוג א', שתי הנקודות $(c, 0)$, $(-c, 0)$ אינברסיות אחת לשנייה ביחס לכל אחד ממעגלי האוסף. הסק כי מעגלי האוסף הם מעגלי אפולוניוס עבור הנקודות $(c,0)$, $(-c, 0)$.

8. הוכח כי עבור אוסף מסוג א', אם מבצעים אינברסיה שמרכזה באחת הנקודות $(c, 0)$, $(-c, 0)$, אזי האוסף יהפוך לאוסף מעגלים קונצנטריים שמרכזם בנקודה האינברסית לנקודה השנייה, ואוסף המעגלים המאונכים למעגלי האוסף מסוג א' יהפוך לאוסף הישרים העוברים דרך הנקודה האינברסית לנקודה השנייה.

חלק ב' – שאלות מ-IMO

1. (IMO 1995/1) תהיינה A,B,C,D ארבע נקודות שונות על ישר אחד, בסדר זה. המעגלים עם הקטרים AC ו-BD נחתכים ב-X ו-Y. הישר XY חותך את BC ב-Z. תהא P נקודה על ישר XY שאינה Z. הישר CP חותך את המעגל שקוטרו AC בנקודות C ו-M, והישר BP חותך את המעגל שקוטרו BD בנקודות B ו-N. הוכח כי הישרים AM,DN,XY נחתכים בנקודה אחת.

2. (IMO 2008/1) נקודת מפגש הגבהים של משולש חד זוויות ABC היא H. המעגל העובר דרך H, אשר מרכזו באמצע הקטע BC, חותך את הישר BC בנקודות A_1 ו-A_2. באופן דומה, המעגל העובר דרך H, אשר מרכזו באמצע הקטע CA, חותך את הישר CA בנקודות B_1 ו-B_2, והמעגל העובר דרך H, אשר מרכזו באמצע הקטע AB, חותך את הישר AB בנקודות C_1 ו-C_2. הראה כי $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ נמצאות על מעגל אחד.

3. (IMO 2004/1) יהי ABC משולש חד זוויות שאינו שווה-שוקיים. המעגל שקוטרו BC חותך את הצלעות AB ו- AC בנקודות M ו-N, בהתאמה. נסמן ב-O את אמצע הצלע BC. חוצי הזוויות של $\sphericalangle BAC$ ושל $\sphericalangle MON$ נחתכים בנקודה R. הוכח כי למעגלים החוסמים של המשולשים BMR ו-CNR יש נקודה משותפת על הצלע BC.

4. (ISL 2009/G3) נתון משולש ABC. המעגל החסום ב-ABC משיק ל-AB ו-AC בנקודות Z ו-Y, בהתאמה. תהא G נקודת החיתוך של הישרים BY ו-CZ, ותהיינה R ו-S נקודות כאלה, ששני המרובעים BCYR ו-BCSZ הם מקביליות. הוכח כי GR=GS.

5. (IMO 2012/5) יהא ABC משולש ובו $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, ויהא D עקב הגובה מ-C. תהא X נקודה על הקטע הפתוח CD. תהא K הנקודה על הקטע AX, עבורה BC = BK. באופן דומה, תהא L הנקודה על הקטע BX, עבורה AC = AL. תהא M נקודת החיתוך של AL ו-BK. הוכח כי ML =MK.