תרגיל פולינומים

1. מצא את כמות השורשים המרוכבים השונים לכל אחד מבין הפולינומים הבאים:

א. $x^3-9x+\sqrt{108}$. ב. $x^4+2x^3+3x^2+4x+5$. ג. $x^{10}+\frac{x^3}{7}+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{10}$.

2. נתון פולינום p מתוקן (מקדם מוביל = 1) שדרגתו גדולה מ-0. האם יתכן, שלכל x שלם או חצי-שלם, $p(x)$ יהיה מספר שלם?

3. בהינתן $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=26 \\ x^3+y^3+z^3=90 \end{cases}$ חשב את $x^4+y^4+z^4$.

4. נתון פולינום בעל מקדמים ב-$\mathbb{Z}/2$

(א) במשתנה אחד

(ב) בשני משתנים

האם קיימת כפולה של פולינום זה, המכילה פחות מ-100 מונומים?

5. נתון פולינום ריבועי $q(x)$ עם מקדמים ממשיים, המקיים: $x>0$ לכל $x>0$. האם בהכרח קיים פולינום $p(x)$ מדרגה כלשהו, שכל מקדמיו חיוביים, וגם כל מקדמיו של $p\cdot q$ חיוביים?

6. פרק לגורמים את $(x-3y+2z)^3+(y-3z+2x)^3+(z-3x+2y)^3$.

7. פרק לגורמים את $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-120$.

8. נתונים $a,b\in\mathbb{R}$ עבורם $a^3+b^3+3ab=1$. חשב את $a+b$.

9. נתבונן בביטויים מסוג $\pm1\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{4}\pm\sqrt{5}\pm\ldots\pm\sqrt{100}$, כאשר הסימנים נבחרים באופן בלתי תלוי. יהיה A המכפלה של כל הביטויים האלה. הוכח כי A

א. מספר שלם,

ב. ריבוע של מספר שלם.

10*. פרק את הפולינום x^n-1 לגורמים אי-פריקים בעלי מקדמים שלמים.

11*. הוכח כי לכל α,β אלגבריים, קיים γ עבורו $\mathbb{Q}[\alpha,\beta]=\mathbb{Q}[\gamma]$.

בהצלחה!