משולשים וארבעונים אורתולוגיים ופרספקטיביים

הגדרות פרספקטיבה. משולשים $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ נקראים פרספקטיביים (ביחס לנקודה P) אם כל הישרים A_iB_i נפגשים בנקודה אחת (P, שנקראת מרכז הפרספקטיבה).

משולשים נקראים פרספקטיביים ביחס לישר אם צלעותיהם המתאימות A_iA_k , B_iB_k נחתכות ב-3 נקודות, שכולן על ישר אחד (ישר הפרספקטיבה).

ארבעונים $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ נקראים פרספקטיביים (ביחס לנקודה P) אם כל הישרים A_iB_i נפגשים בנקודה אחת (P, שנקראת מרכז הפרספקטיבה).

ארבעונים $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ נקראים פרספקטיביים ביחס למישור אם צלעותיהם המתאימות A_iA_k , B_iB_k נפגשות בנקודה, ו-6 הנקודות שנוצרות בצורה הזאת נמצאות במישור אחד (שנקראת מישור הפרספקטיבה).

כל ההגדרות הנ"ל פרויקטיביות (במישור פרויקטיבי או במרחב פרויקטיבי).

הגדרות אורתולוגיה. משולש $A_1A_2A_3$ אורתולוגי ביחס ל-$B_1B_2B_3$ אם האנכים מ-A_i לצלעות המתאימות של $B_1B_2B_3$ (מול B_i) נפגשים בנקודה O_A, שתקראה מרכז האורתולוגיה.

ארבעון $A_1A_2A_3A_4$ אורתולוגי ביחס ל- $B_1B_2B_3B_4$ אם האנכים מ-A_i לפאות המתאימות של $B_1B_2B_3B_4$ (מול B_i) נפגשים בנקודה O_A, שתקראה מרכז האורתולוגיה.

תרגילי הבנה.

1. משפט דזארג טוען, שמשולשים פרספקטיביים ביחס לישר אם ורק אם הם פרספקטיביים ביחס לנקודה. הוכיחו טענה דומה עבור ארבעונים במרחב.

2. הוכיחו כי אורתולוגיה על משולשים הדדית.

3. הוכיחו כי אורתולוגיה על ארבעונים היא הדדית ושקולה לתנאי נוסף: לכל 4 אינדקסים i,k,m,n שהם תמורה של $1,2,3,4$, הכיוון של ישר A_iA_k מאונך לכיוון של ישר B_mB_n.

4. הוכיחו, שגבהים של ארבעון נפגשים בנקודה אחת, אם ורק אם הם המקצועות המצטלבים שלו מאונכים. הוכיחו, שעל מנת להגיע למצב זה מספיק לדרוש מפגש של 3 גבהים, או מאונכות של שני זוגות של מקצועות מצטלבים, או אפילו שגובה אחד של ארבעון עובר בנקודת מפגש הגבהים של הפאה.

משפט מרכזי. נתונים משולשים $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ שהם גם פרספקטיביים וגם אורתולוגיים זה לזה. מרכז פרספקטיבה הוא P, מרכזי אורתולוגיה O_A, O_B. אזי הנקודות P, O_A, O_B נמצאות על ישר אחד, שמאונך לישר הפרספקטיבה.

1*. הוכיחו את המשפט המרכזי.

2. נסחו והסיקו משפט דומה למקרה התלת-ממדי.

הגדרה. בהינתן משולש ABC ונקודה X לא על צלעותיו, נתבונן בצ'ביאנות AA_1, BB_1, CC_1. אזי ישר הפרספקטיבה של משולשים ABC, $A_1B_1C_1$ נקרא פולארה תלת-ליניארית של X ביחס למשולש ABC.

סימונים: במשולש ABC: מרכז של המעגל החוסם O, של החסום I, מפגש הגבהים H. נסמן ב- G (נקודת Gergonne) את מפגש הקטעים שמחברים קודקודים לנקודות השקת המעגל החסום לצלעות הנגדיות לקודקודים אלה. מפגש הקטעים מהקודקודים לנקודות השקה של הצלע הנגדית עם המעגל החסום מבחוץ הנגדי N (נקודת Nagel), נקודה סימטרית ל-I ביחס ל-O היא P, הצמוד האיזוגונאלי ל-P הוא Q, מפגש התיכושקפים L (נקודת Lemoine).

3. הוכח כי הפולארה התלת-ליניארית של G מאונכת לישר IG.

4. הוכח כי הפולארה התלת-ליניארית של H מאונכת לישר אוילר (משפט הציר האורתוצנטרי).

5. הוכח כי P, Q, N נמצאות על ישר אחד.

6. הוכח כי הפולארה התלת-ליניארית של N מאונכת ל-IH.

7. יהיו A_1, B_1, C_1 אמצעי הקשתות AB, AC, BC של המעגל החוסם. יהיו E, F נקודות המפגש של AB עם A_1B_1, ושל AC עם A_1C_1. הוכח: EF מאונך ל-OI.

8. הוכיחו שנקודות מפגש של חוצי הזוויות החיצוניים עם הצלעות הנגדיות נמצאות על ישר אחד, שמאונך ל-OI.

9. הוכיחו, כי נקודות המפגש של המשיקים למעגל החוסם בקודקודים עם הצלעות הנגדיות נמצאים על ישר אחד, שמאונך ל-OL.

10. הוכיחו שאם שני משולשים אורתולוגיים, ומרכזי האורתולוגיה מתלכדים (של הראשון ביחס לשני ושל השני ביחס לראשון), אז המשולשים גם פרספקטיביים.