תרגול – המרובע השלם

בסעיפים 1-7, נניח, כי נתון מרובע שלם – צורה המורכבת מ-4 ישרים הנמצאים במצב כללי ושש נקודות חיתוכם (קדקודי המרובע השלם).

הוכיחו את התכונות הבאות של המרובע השלם:

1. אמצעי שלושת אלכסוניו (הקטעים המחברים קדקוד כלשהו של המרובע השלם לקדקוד הנגדי לו – הקודקוד היחיד שלא נמצא עמו על אותו ישר נתון), נמצאים על ישר אחד (הישר של גאוס), נסמנו ℓ.

2. ע"י התעלמות בכל פעם מישר אחר בתמונה, נקבל ארבעה משולשים. למעגלים החוסמים של כל המשולשים יש נקודה משותפת. זוהי נקודת מיקל. נסמנה M.

3. נקודות מפגש הגבהים של ארבעת המשולשים הנ"ל נמצאות על ישר אחד, נסמנו ℓ'.

4. ישר זה מכיל גם את השיקופים של M ביחס לכל אחד מבין ארבעת הישרים היוצרים את המרובע השלם.

5. $\ell \perp \ell'$.

6*. מרכזי המעגלים החוסמים של המשולשים הנ"ל נמצאים על מעגל אחד, העובר דרך M.

7*. עבור כל אחד מבין ארבעת המשולשים הנ"ל, נתבונן באנך האמצעי לקטע המחבר בין נקודת מפגש הגבהים ומרכז המעגל החוסם. בהנחה שכל האנכים האמצעיים הנ"ל מוגדרים היטב, הם נפגשים בנקודה אחת.

****

8. נתון מרובע חסום ABCD, אף שתיים מצלעותיו לא מקבילות. אז, נק' מיקל של המרובע השלם הנוצר מהישרים שמכילים את צלעותיו נמצאת על הישר שעובר דרך נקודות החיתוך של זוגות צלעות נגדיות של המרובע.

9. נתונים חמישה ישרים במצב כללי במישור. לכל ארבעה מהם, מתאימה נקודת מיקל. חמש הנקודות המוגדרות באופן זה נמצאות על מעגל אחד.

10*. יהא A,B,C משולש חד-זוויות שחסום במעגל Γ. יהא ℓ ישר משיק למעגל Γ. נסמן ב-ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c את הישרים המתקבלים על ידי שיקוף הישר ℓ ביחס לישרים BC, CA, AB בהתאמה. הוכח כי המעגל החוסם של המשולש שנוצר על ידי הישרים ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c משיק למעגל Γ.